Matemática

Bloque 2: Geometría

Clase 9 – Martes 16-5

Facultad de Ciencias Agrarias y Forestales
UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PLATA

Cronograma

9	15-may	Tema 6: Sistemas de coordenadas (R ,R2, R3). Distancia entre puntos. Punto medio de un segmento. La recta en el plano.	Trabajo Práctico N°4: Sistemas de coordenadas. Lugar geométirco , ecuaciones y gráficas

REPRESENTACIONES GRÁFICAS

Imagen de Peggy und Marco Lachmann-Anke en Pixabay

¿Qué vamos a estudiar en esta segunda etapa del curso?

¿Qué?

¿Dónde?

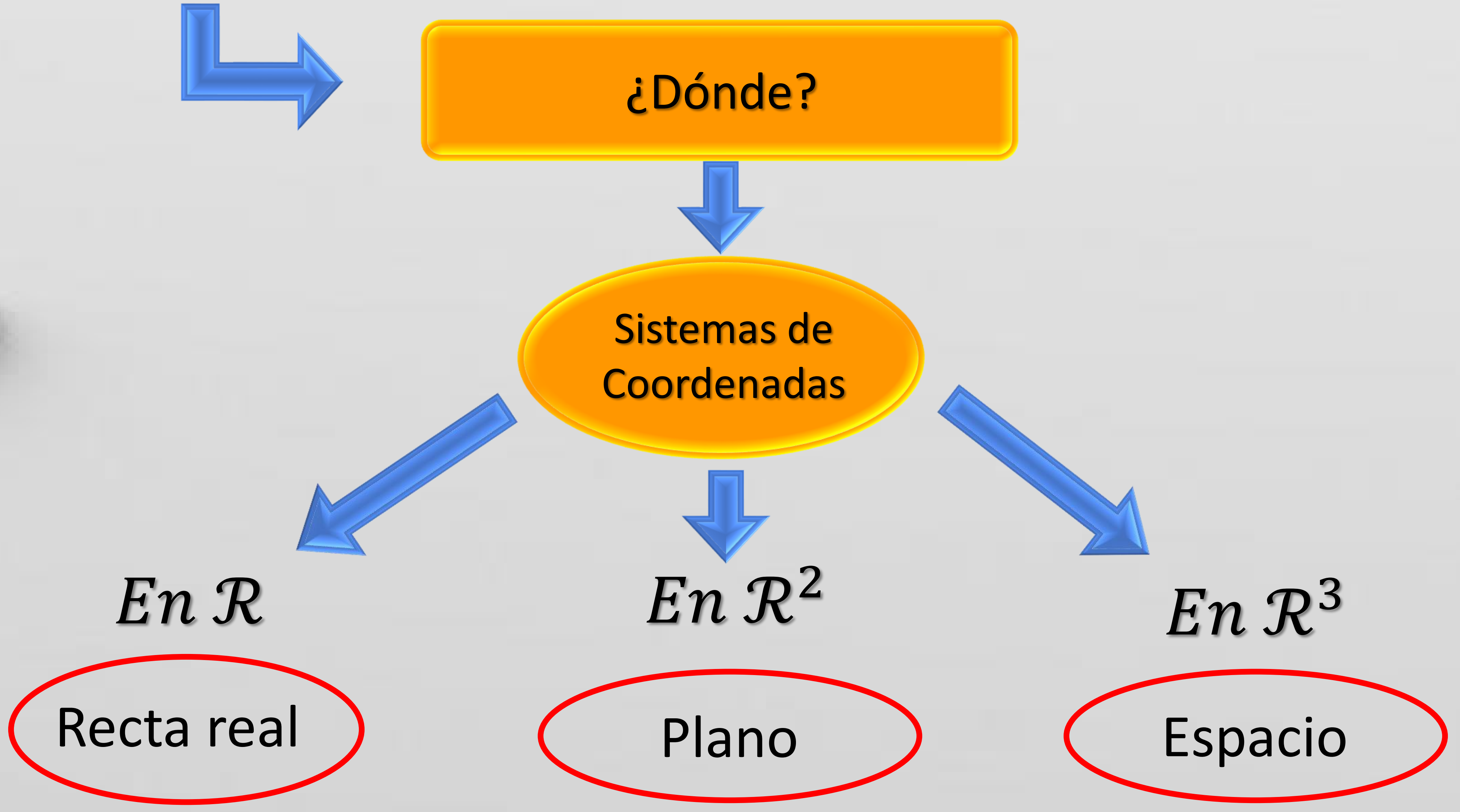
Elementos Geométricos/ Regiones

Ecuaciones/ Inecuaciones

Sistemas de Coordenadas

$\mathcal{R}$ $\mathcal{R}^2$ $\mathcal{R}^3$

REPRESENTACIONES GRÁFICAS



REPRESENTACIONES GRÁFICAS

¿Qué?

Elementos Geométricos/ Regiones

PUNTO

¿Cuál es el elemento básico?

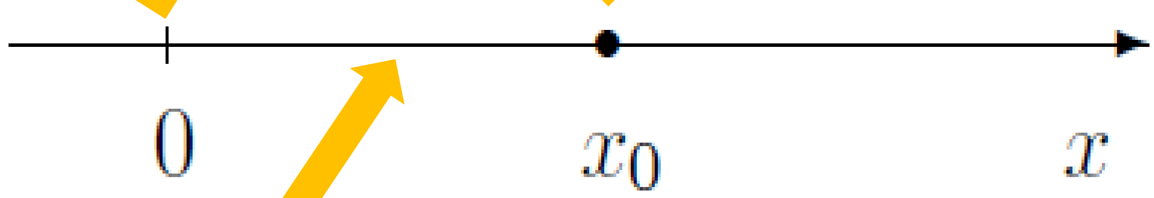
El PUNTO

$En\ \mathcal{R}(recta\ real)$ | $En\ \mathcal{R}^2$ | $En\ \mathcal{R}^3$

Punto de UNA coordenada

Origen de coordenada

Punto $P(x_0)$



Eje coordenado

Ejemplo: Ubiquemos los siguientes puntos en la recta real:

$P_1(3)$ $x = -2$

P_3 Siendo un punto que se ubica a cinco unidades a la izquierda del origen del eje coordenado

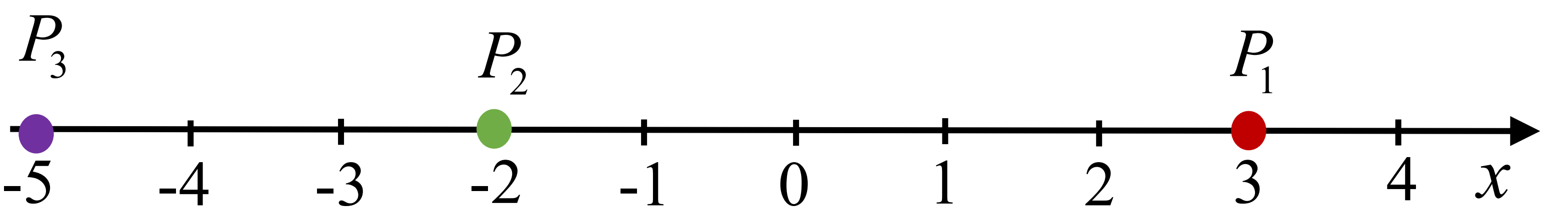


Imagen
de 3dman_eu en Pixabay

El PUNTO

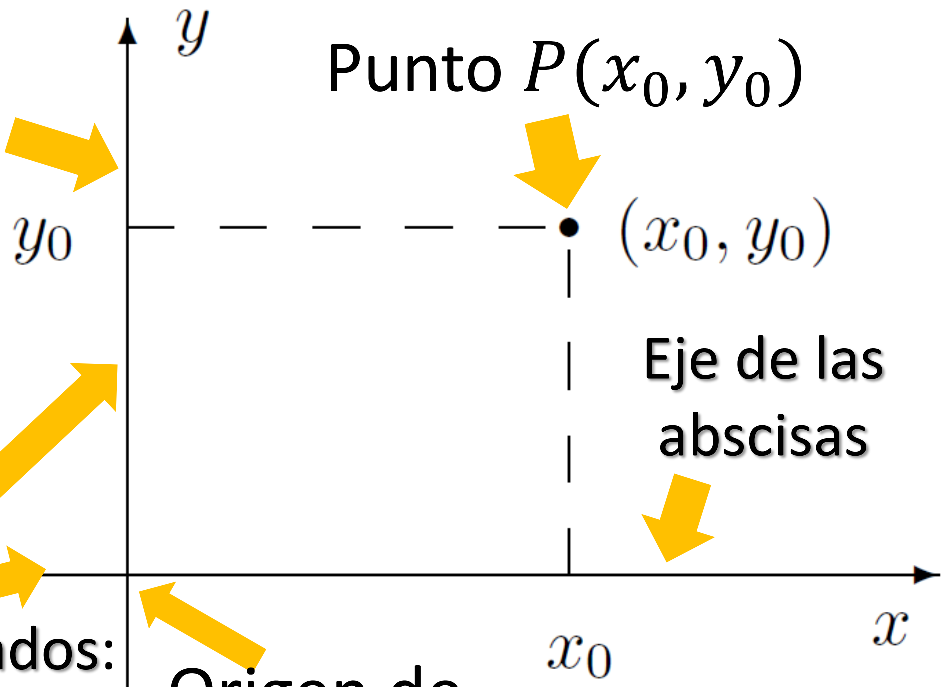
$En\ \mathcal{R}$

$En\ \mathcal{R}^2\ (plano)$

$En\ \mathcal{R}^3$

Eje de las ordenadas

Punto $P(x_0, y_0)$



Eje de las abscisas

Punto de DOS coordenadas

Ejes coordenados: dos rectas perpendiculares

Origen de coordenadas

Ejemplo: Ubiquemos los siguientes puntos en el plano:

$P_1(3,-1)$ $\quad P_2(-2,2)$ $\quad P_3(1/2,4)$

GeoGebra

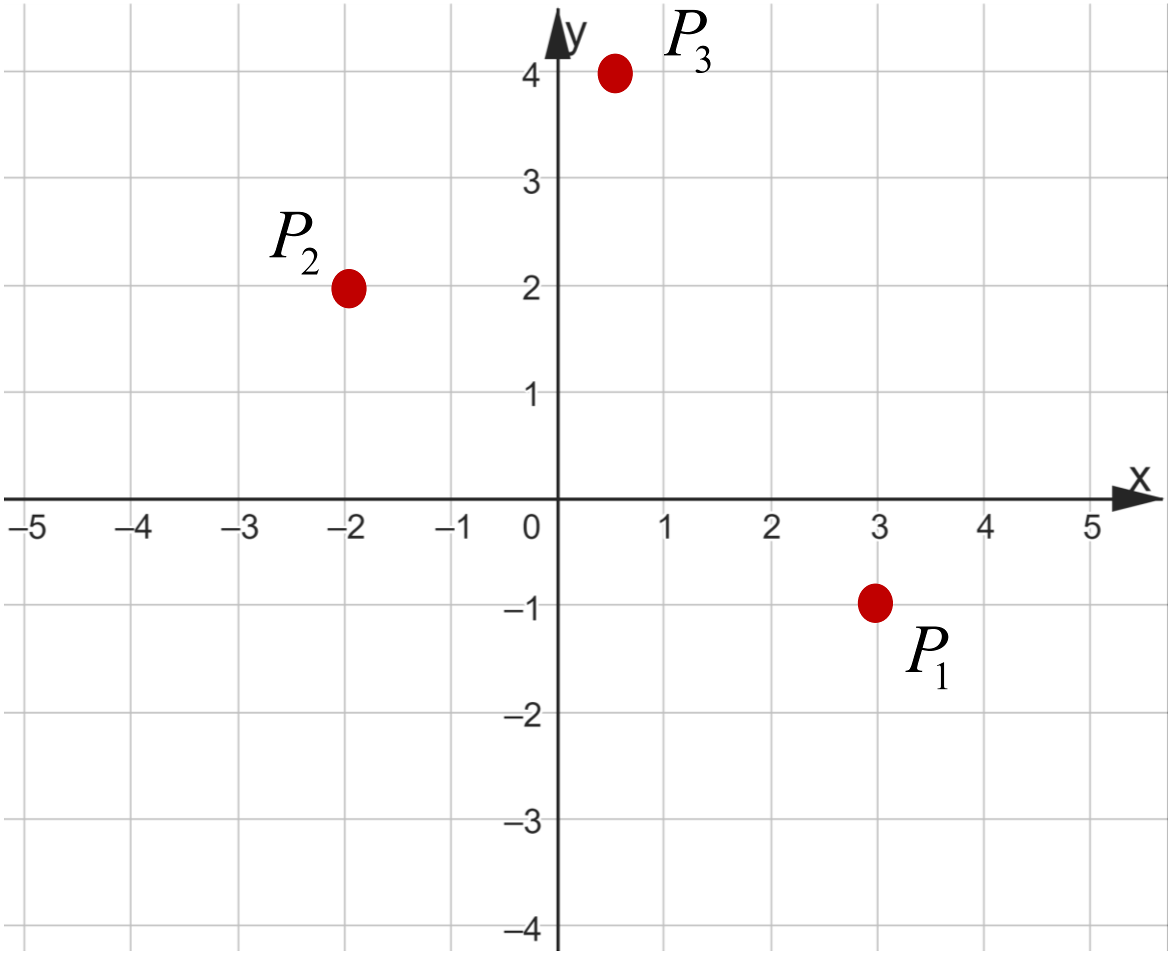


Imagen de 3dman_eu en Pixabay

Ejemplo: Demos las coordenadas de los puntos indicados

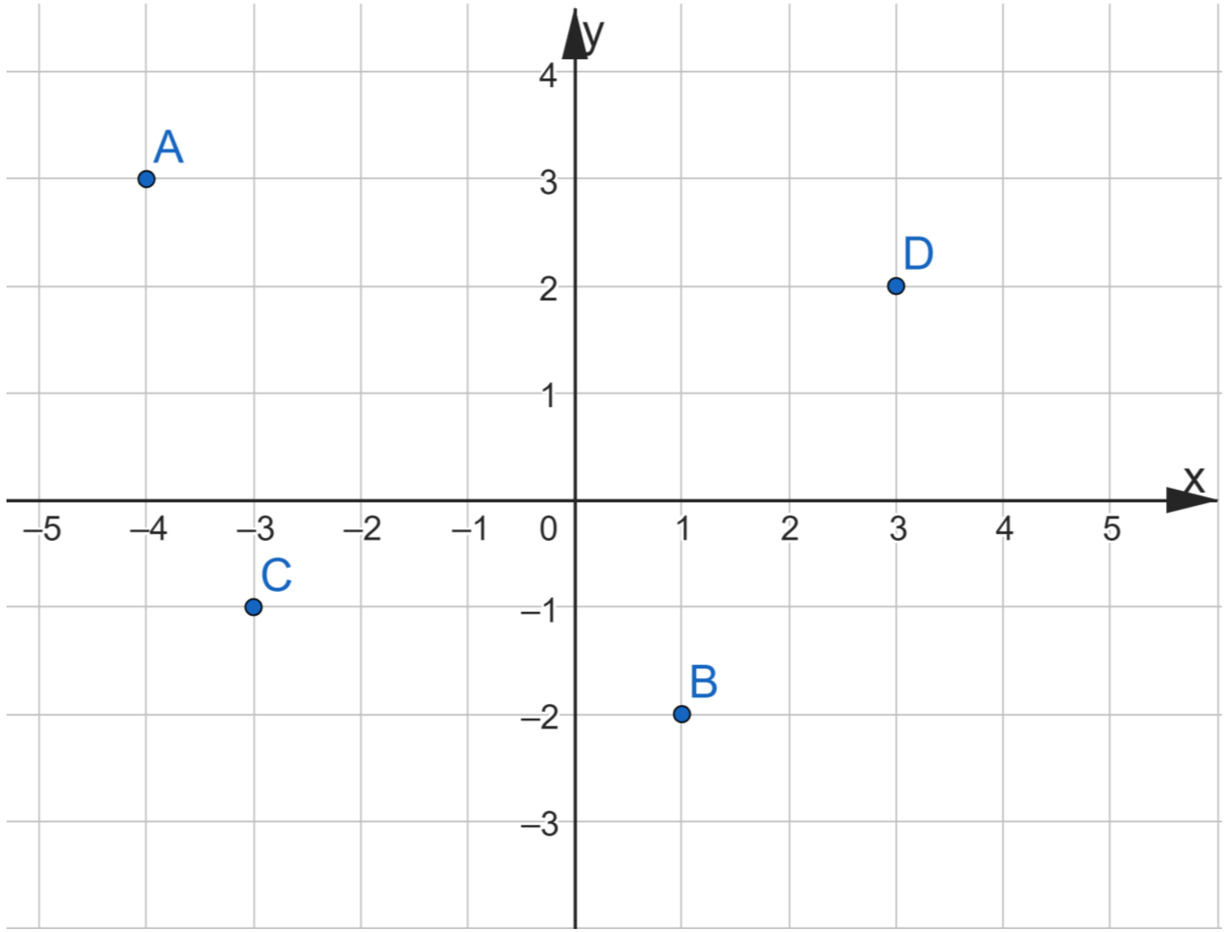


Imagen
de 3dman_eu en Pixabay

El PUNTO

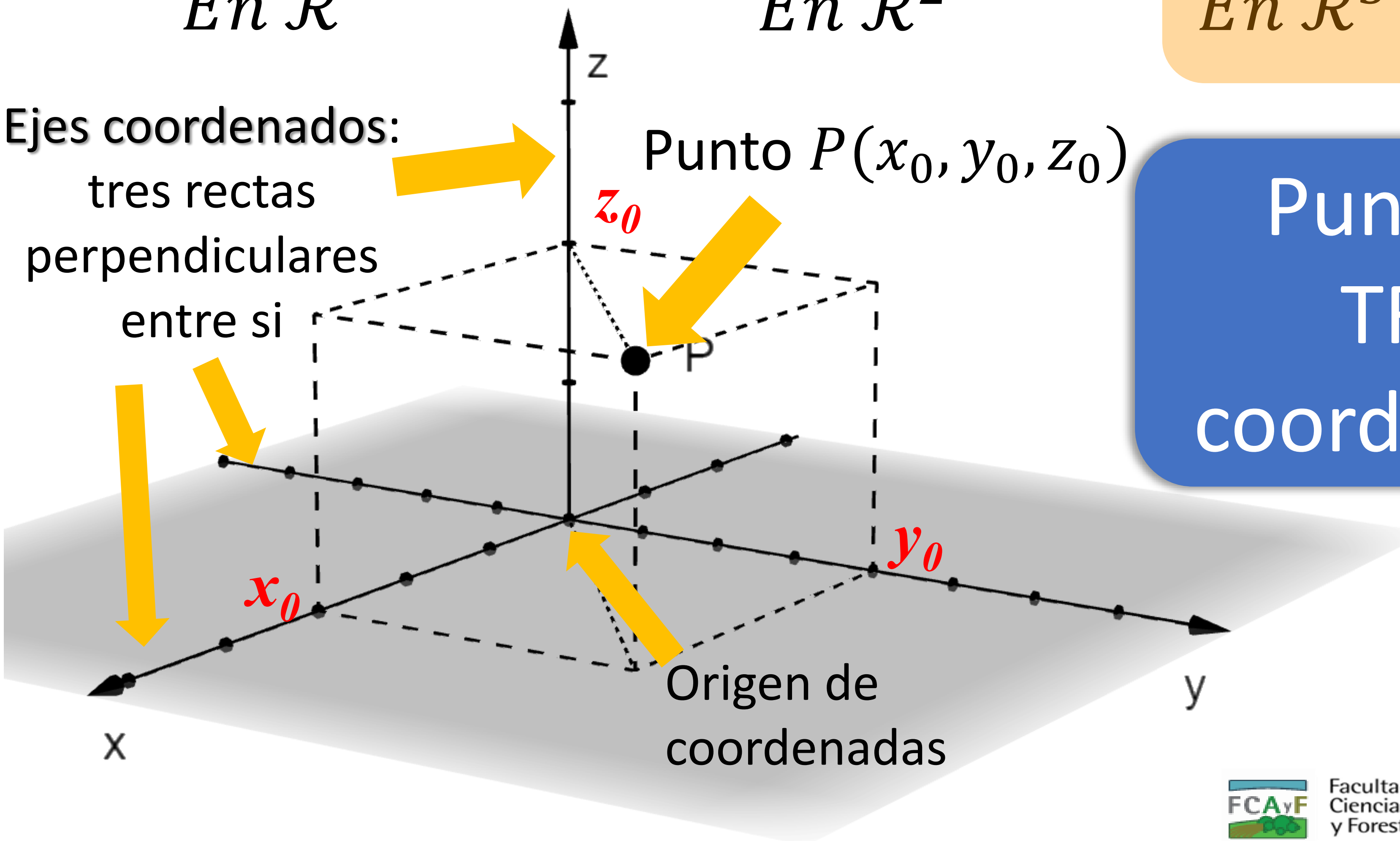
$En\ \mathcal{R}$

$En\ \mathcal{R}^2$

$En\ \mathcal{R}^3\ (espacio)$

Ejes coordenados: tres rectas perpendiculares entre si

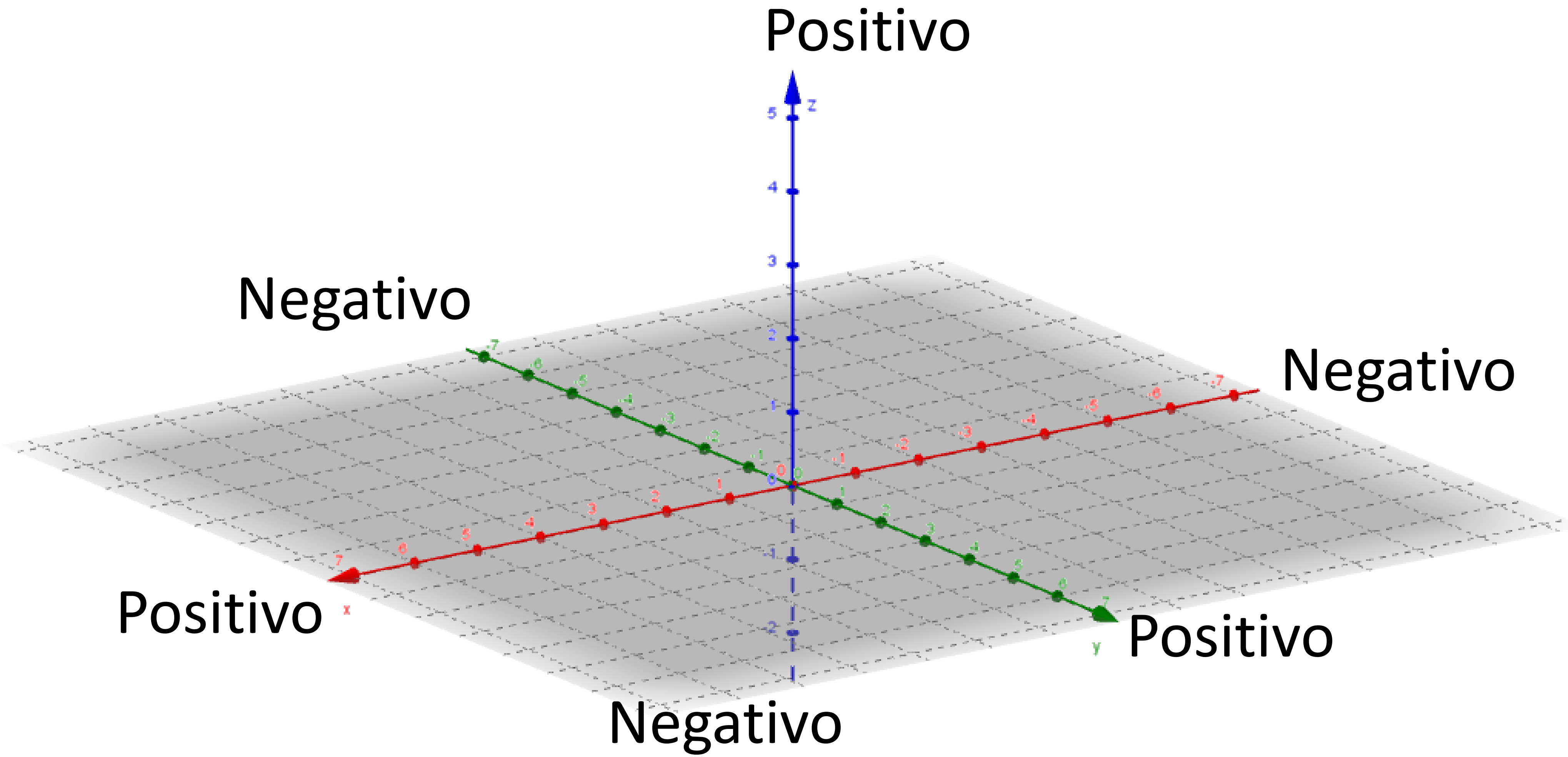
Punto $P(x_0, y_0, z_0)$



Origen de coordenadas

Punto de TRES coordenadas

$En\ \mathcal{R}^3(espacio)$



Ejemplo: Ubicamos el punto P(3,2,4)

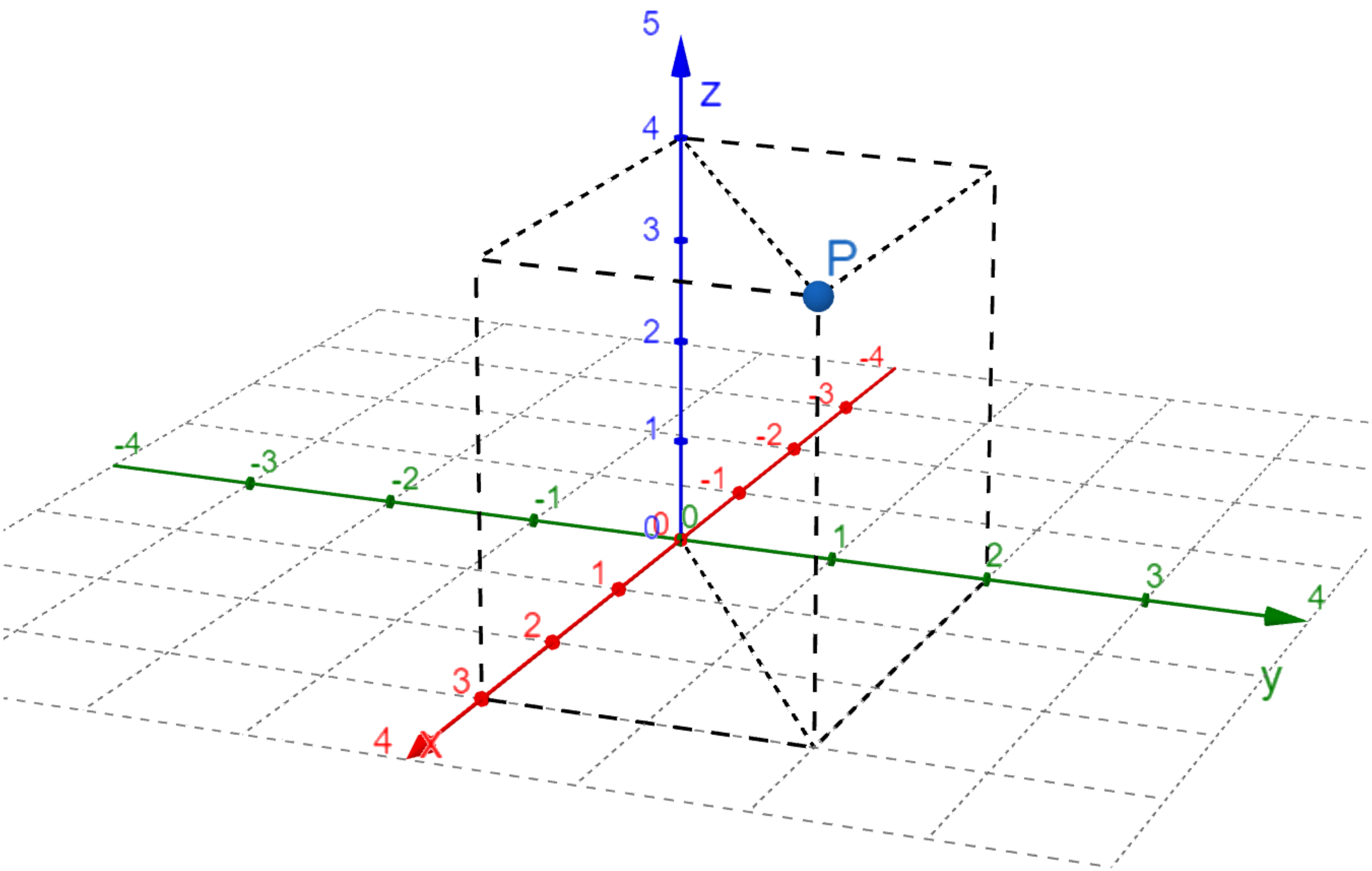


Imagen
de 3dman_eu en Pixabay

Ejemplo: Ubicar los siguientes puntos en el espacio:

$$P_1(3,1,4)$$

$$P_2(-2,2,1)$$

$$P_3(2,4,-5)$$

Imagen de 3dman_eu en Pixabay

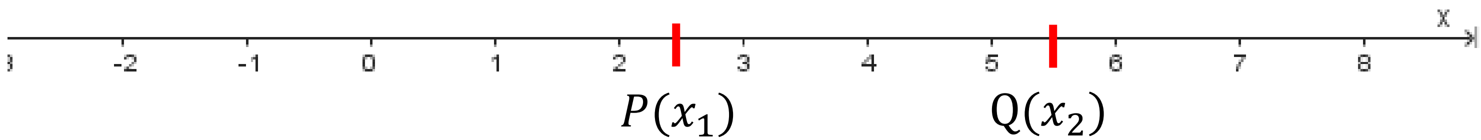
Podemos utilizar GeoGebra para verificar que los graficamos bien

Distancia entre puntos

$En\ \mathcal{R}$

$En\ \mathcal{R}^2$

$En\ \mathcal{R}^3$



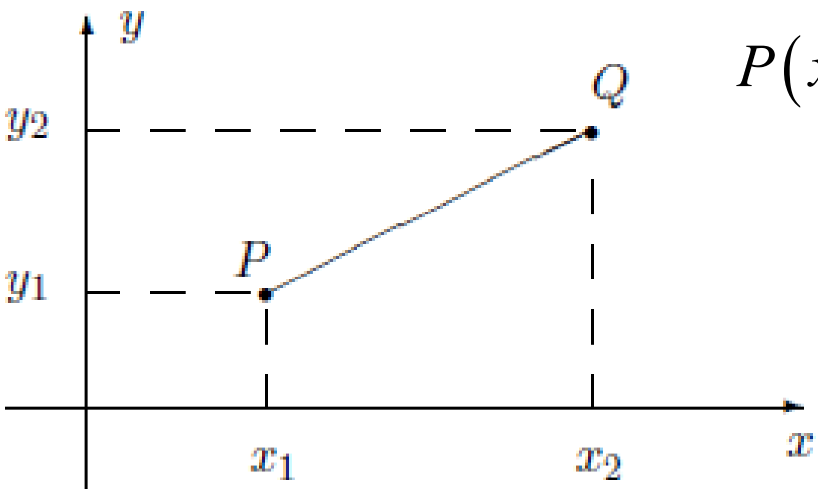
$$\boxed{d(P,Q)=\sqrt{(x_2-x_1)^2}=|x_2-x_1|}$$

Distancia entre puntos

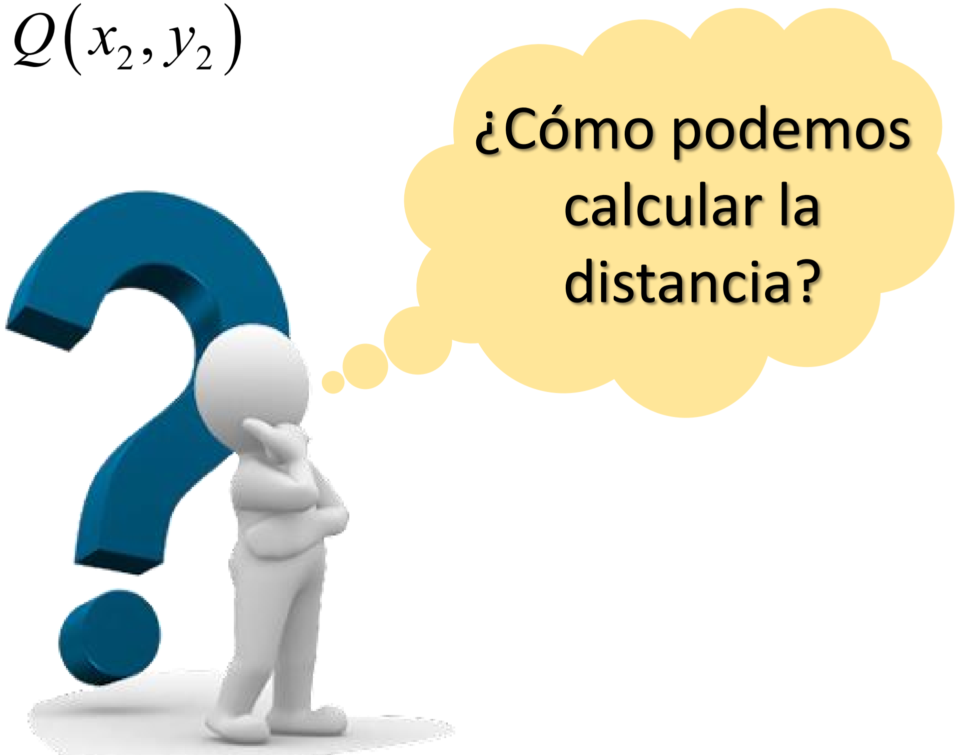
$En\ \mathcal{R}$

$En\ \mathcal{R}^2$

$En\ \mathcal{R}^3$

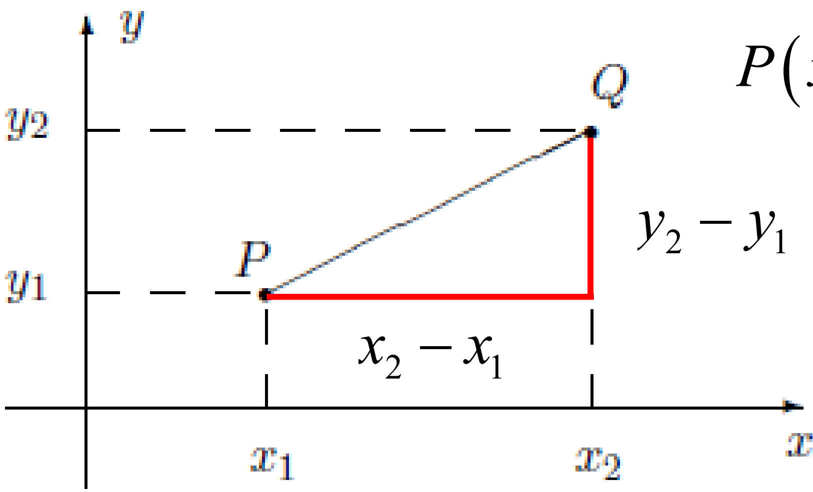


$P(x_1, y_1)$ y $Q(x_2, y_2)$



Distancia entre puntos

$En\ \mathcal{R}$ | $En\ \mathcal{R}^2$ | $En\ \mathcal{R}^3$



$P(x_1, y_1)$ y $Q(x_2, y_2)$

$$d(P,Q) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

¡Con algo que dijo Pitágoras!

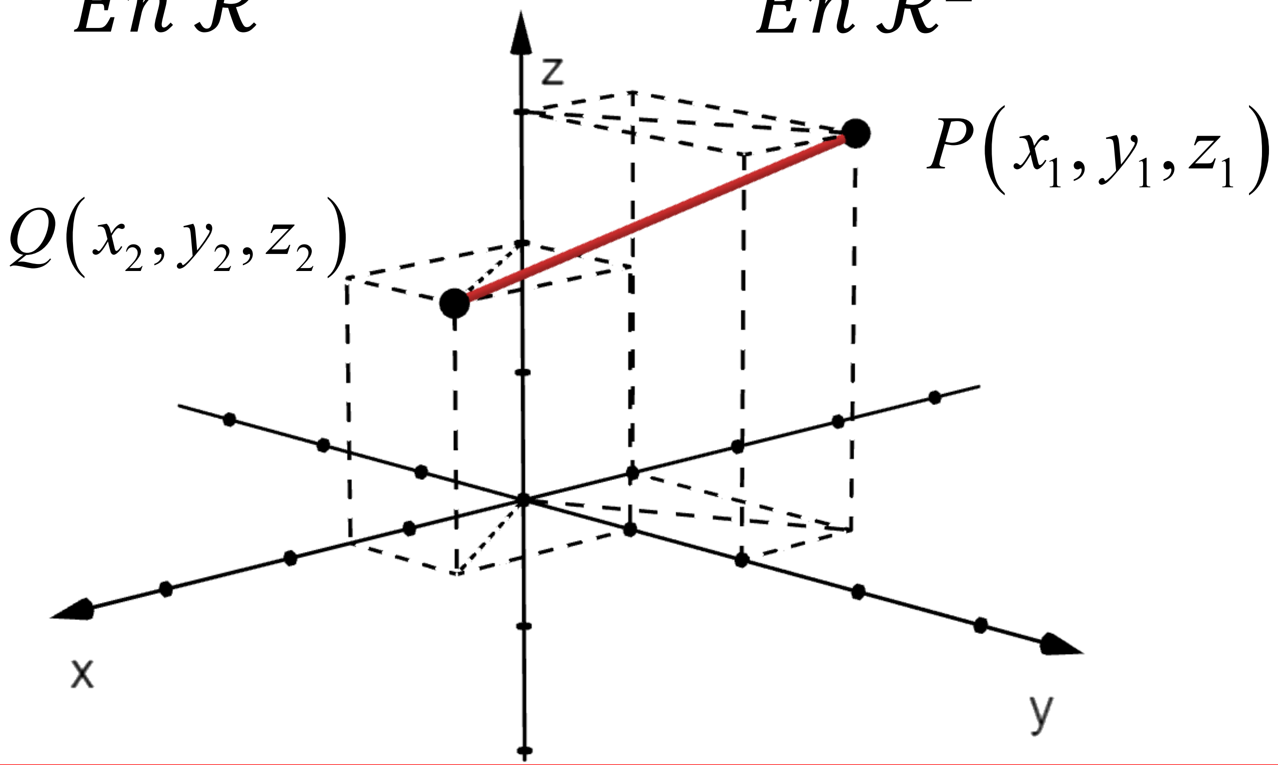
Imagen de 3dman_eu en Pixabay

Distancia entre puntos

$En\ \mathcal{R}$

$En\ \mathcal{R}^2$

$En\ \mathcal{R}^3$



$$d(P,Q)=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

GeoGebra

Ejemplos: Calcular la distancia entre los pares de puntos dados:

$$P_1(-2) \text{ y } P_2(4)$$

$$P_3(-2,3) \text{ y } P_4(4,1)$$

$$P_5(2,4,-5) \text{ y } P_6(3,2,-1)$$

Utilizar GeoGebra para verificar

Imagen
de 3dman_eu en Pixabay

REPRESENTACÓN GRÁFICA

EXPRESIÓN ANALÍTICA

Elementos Geométricos/ Regiones

Ecuaciones/ Inecuaciones

SON DOS FORMAS DE REPRESENTACIÓN DEL MISMO CONJUNTO

Imagen de Peggy and Marco Lachmann-Anke en Pixabay

Ejemplo: Inecuaciones – UNA incógnita

$$\boxed{x \geq 2}$$

¿Dónde lo podemos representar?

¿En $\mathcal{R}$?

¿En $\mathcal{R}^2$?

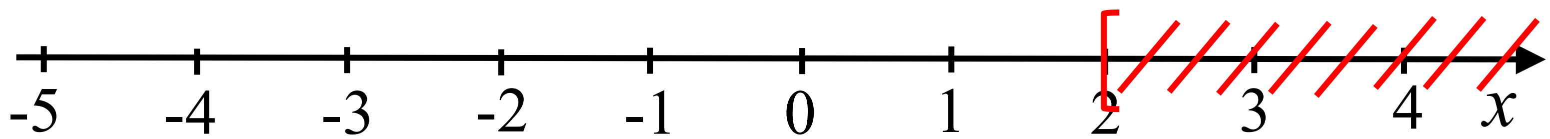
¿En $\mathcal{R}^3$?

Imagen de Peggy and Marco Lachmann-Anke en Pixabay

Ejemplo: Inecuaciones – UNA incógnita

$En\ \mathcal{R}$ $En\ \mathcal{R}^2$ $En\ \mathcal{R}^3$

$$x \geq 2 \longrightarrow S = \{x \in R:\ x \geq 2\}$$



En $\mathcal{R}$ queda un intervalo

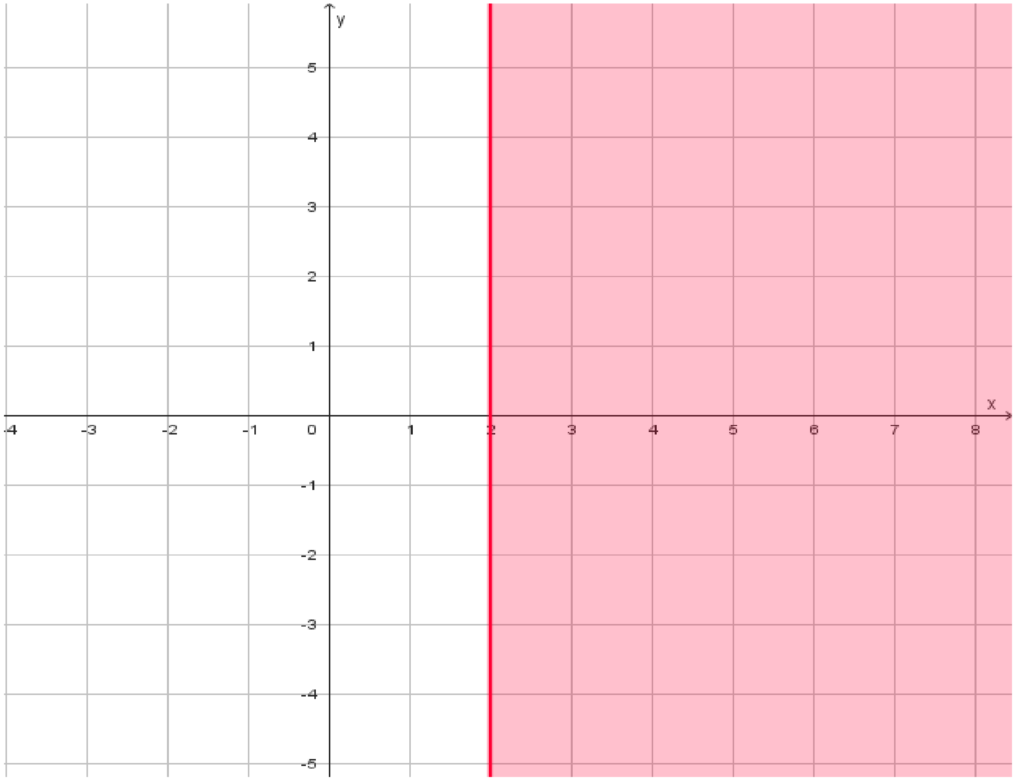
Ejemplo: Inecuaciones – UNA incógnita

$En\ \mathcal{R}$

$En\ \mathcal{R}^2$

$En\ \mathcal{R}^3$

$x \geq 2 \longrightarrow \{(x, y) \in R^2 : x \geq 2\}$



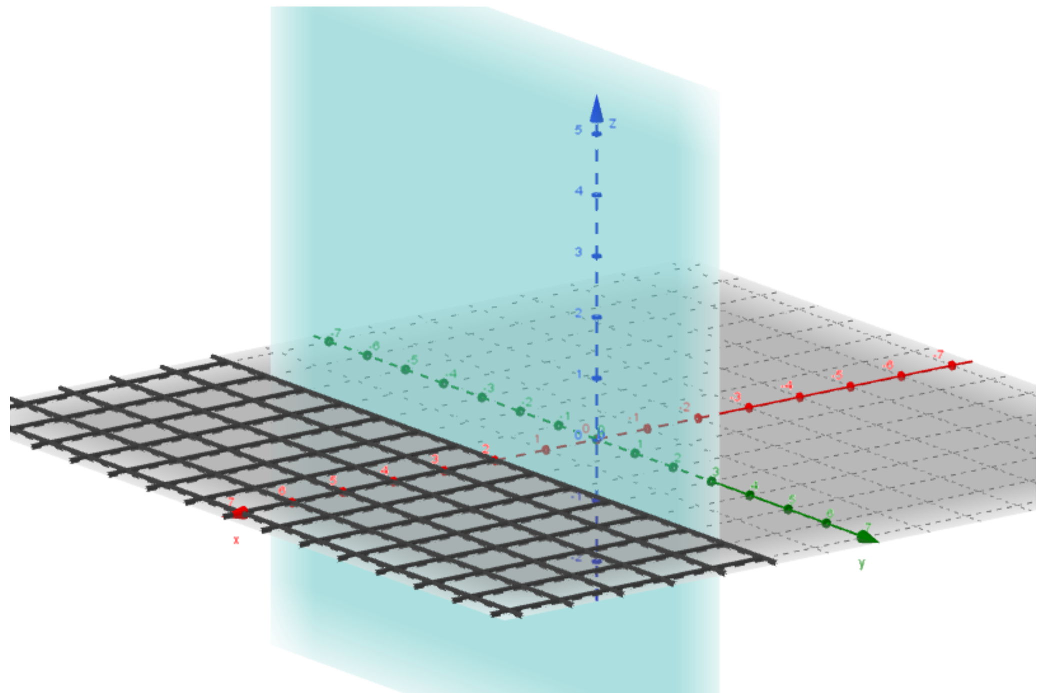
En $\mathcal{R}^2$ queda un semiplano

Ejemplo: Inecuaciones – UNA incógnita

$En\ \mathcal{R}$ $En\ \mathcal{R}^2$ $En\ \mathcal{R}^3$

$$x \geq 2 \longrightarrow \{(x, y, z) \in R^3 : x \geq 2\}$$

En $\mathcal{R}^3$ queda un semiespacio



Ejemplo: Inecuaciones – DOS incógnitas

$$x + y \geq 2$$

¿y ahora... dónde lo podemos representar?

~~¿En $\mathcal{R}$?~~

¿En $\mathcal{R}^2$?

¿En $\mathcal{R}^3$?

Esta foto de Autor desconocido está bajo licencia CC BY-NC-ND

Imagen de Peggy and Marco Lachmann-Anke en Pixabay

Ejemplo: Inecuaciones – DOS incógnitas

$$\boxed{x + y \geq 2} \longrightarrow \{(x, y) \in R^2 : x + y \geq 2\}$$

¡Vamos al GeoGebra!

Imagen de Peggy and Marco Lachmann-Anke en Pixabay

GeoGebra

Miremos *fuerte* …

Imagen de Peggy und Marco Lachmann-Anke en Pixabay

¿y si tenemos una inecuación con 3 incógnitas … dónde podemos representar el conjunto solución?

~~¿En $\mathcal{R}^2$?~~

~~¿En $\mathcal{R}$?~~

¿En $\mathcal{R}^3$?

Imagen de Peggy and Marco Lachmann-Anke en Pixabay

POR LO VISTO HASTA ACÁ…

En algunos casos NECESARIO aclarar
en dónde estamos trabajando…

¿En R, en R^2, en R^3?

Imagen de Peggy and Marco Lachmann-Anke en Pixabay

En el TP4 van a trabajar con algunas desigualdades en R^2 …
En R ya vimos desigualdades en la primera parte del curso…

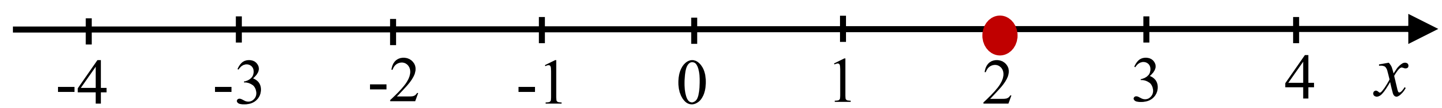
Veamos qué pasa con las ecuaciones....

Ecuación con UNA incógnita

$$\boxed{x = 2}$$

$En\ \mathcal{R}$ | $En\ \mathcal{R}^2$ | $En\ \mathcal{R}^3$

$S = \{2\}$



Una única solución

Con las ecuaciones de UNA incógnita pasa algo parecido....

$$x = 2$$

$En\ \mathcal{R}$

$En\ \mathcal{R}^2$

$En\ \mathcal{R}^3$

$$\{(x, y) \in R^2 : x = 2\}$$

Infinitas soluciones

Con las ecuaciones de UNA incógnita pasa algo parecido....

$$x = 2$$

$En\ \mathcal{R}$

$En\ \mathcal{R}^2$

$En\ \mathcal{R}^3$

$$\{(x, y, z) \in R^3 : x = 2\}$$

Infinitas soluciones

Imagen de Peggy and Marco Lachmann-Anke en Pixabay

Vamos a trabajar con representaciones de ecuaciones lineales R^2

Ecuaciones lineales – DOS incógnitas

Ya vimos que si tenemos dos incógnitas las soluciones son pares ordenados: (x,y)

Podemos representar el conjunto solución en R^2

Imagen de Peggy and Marco Lachmann-Anke en Pixabay

Ecuaciones lineales – DOS incógnitas

EXPRESIÓN ANALÍTICA ⟷ **REPRESENTACÓN GRÁFICA**

$$Ax + By + C = 0$$

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

$$y = mx + b$$

RECTA

Distintas formas de escribir una ecuación lineal

Si lo graficamos en R^2

AVISO IMPORTANTE

(x_0, y_0) es solución de la ecuación $y = mx + b$

Sí y solo sí

El punto $P_0(x_0, y_0)$ está sobre la recta de ecuación $y = mx + b$

Es decir que también vale:

El punto $P_0(x_0, y_0)$ **NO** está sobre la recta de ecuación $y = mx + b$

Sí y solo sí

(x_0, y_0) **NO** es solución de la ecuación $y = mx + b$

Ecuación de la recta

¡Repasar lo visto en el curo nivelatiorio sobre RECTAS en el plano!s

- Ecuación de rectas horizontales y verticales
- Ecuación de la recta a partir de dos puntos
- Ecuación de la recta a partir de un punto y la pendiente
- Ecuación de los ejes coordenados
- Gráfica de una recta a partir de su ecuación

Ecuación de la recta

Repasamos: la ecuación de una recta

$$y = mx + b$$

pendiente de la recta

ordenada al origen de la recta

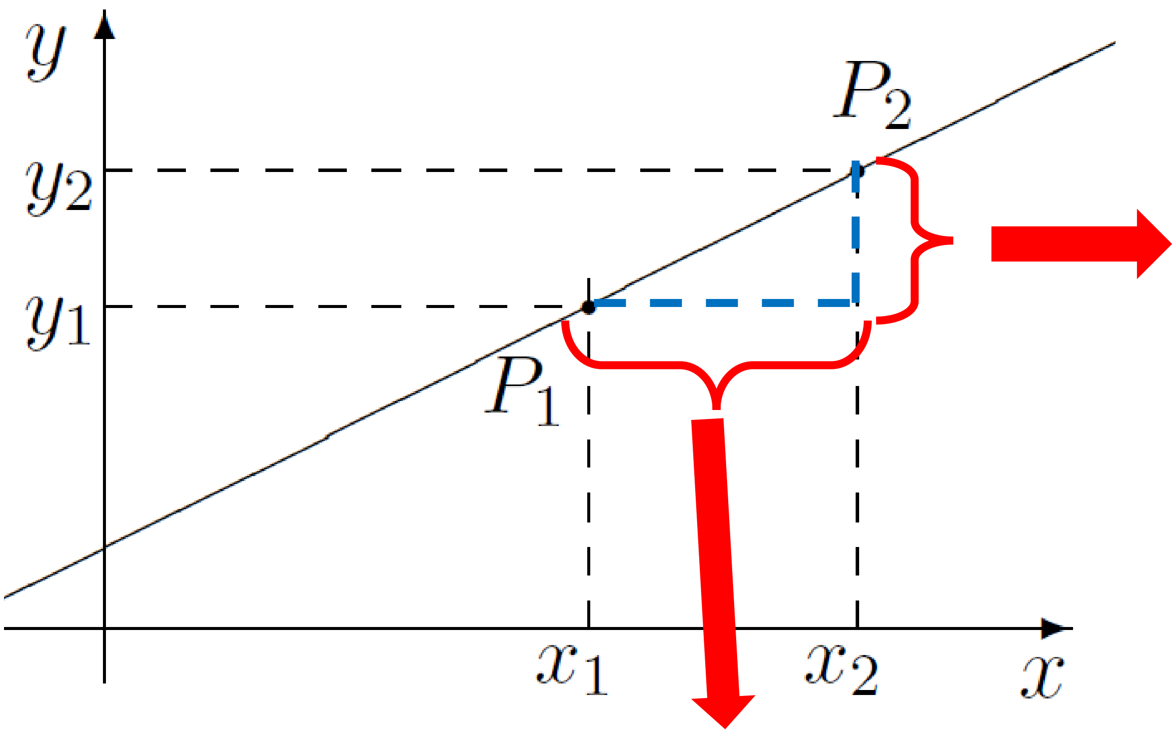
$$y - y_0 = m\left(x - x_0\right)$$

pendiente de la recta

$P(x_0,y_0)$ punto de la recta

Pendiente de la recta

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$



DESPLAZAMIENTO VERTICAL (cambio en la coordenada y)

DESPLAZAMIENTO HORIZONTAL (cambio en la coordenada x)

¡Veamos algunos ejemplos!

Imagen de Peggy and Marco Lachmann-Anke en Pixabay

Ejemplos: Dada la ecuación de la recta $y = 2x - 3$

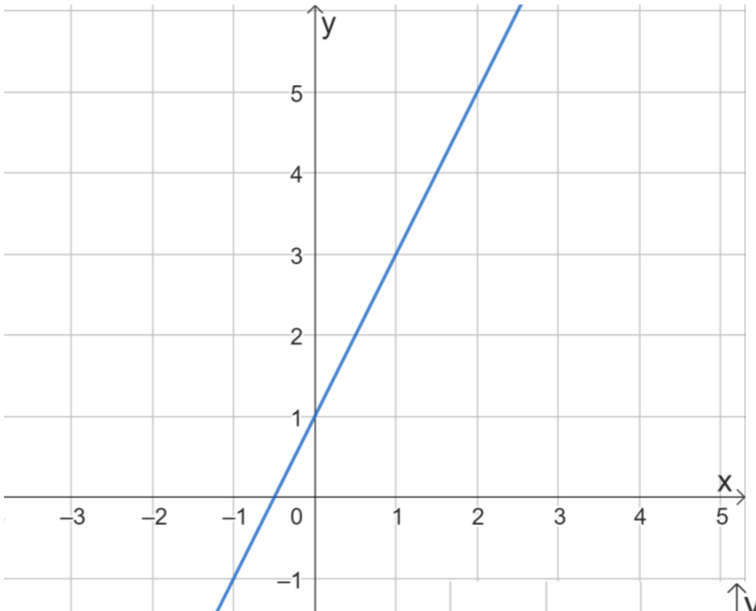
¿El punto $P_1(2,1)$ pertenece a la recta?

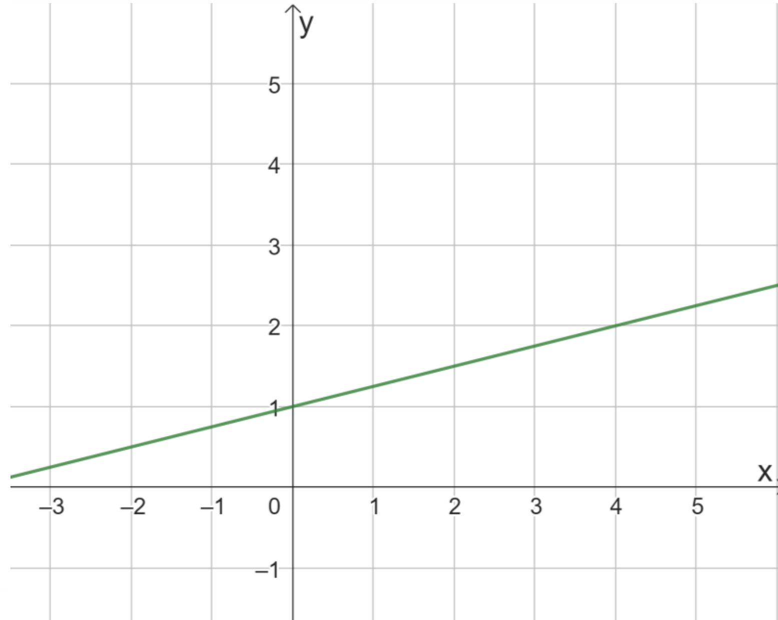
¿El punto $P_1(-1,-1)$ pertenece a la recta?

Determinar un punto que pertenezca a la recta

Imagen de 3dman_eu en Pixabay

¿Cuál recta tiene mayor pendiente? ¿Cuál es la pendiente de cada una de las rectas? ¿Cuál es la ecuación de cada una de ellas?





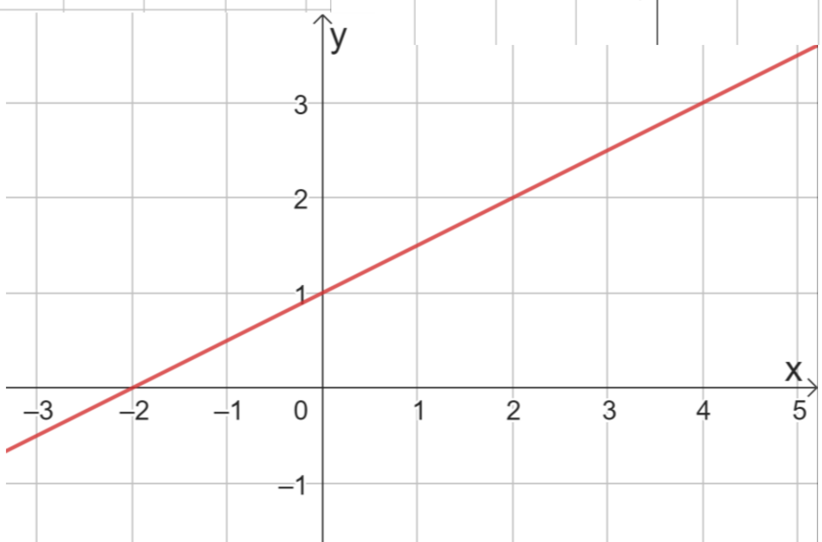
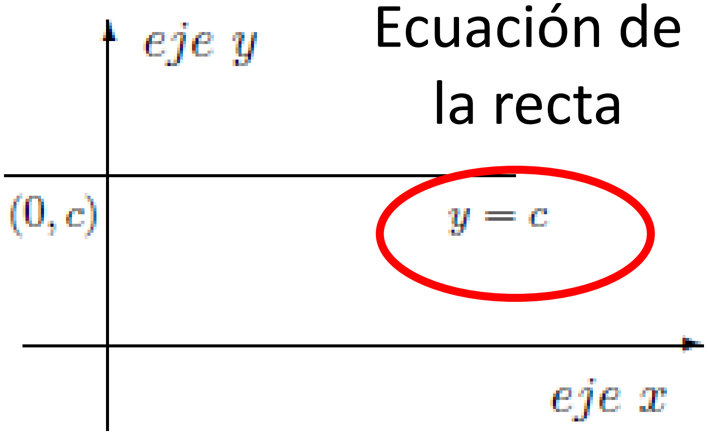
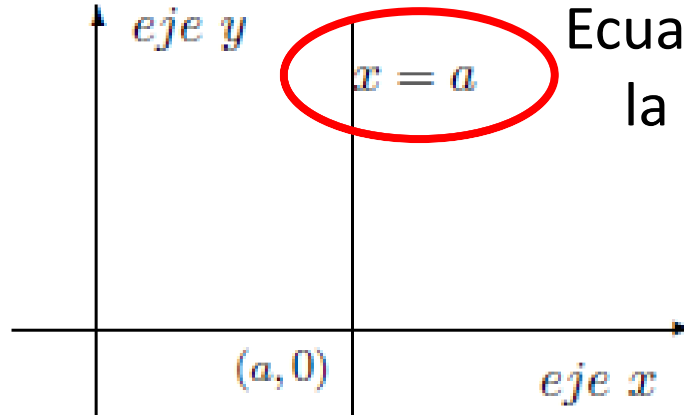


Imagen de 3dman_eu en Pixabay

Rectas paralelas a los ejes coordenados



Ecuación de la recta



Ecuación de la recta

Paralelas al eje x

Rectas horizontales

Paralelas al eje y

Rectas verticales

A pensar …

¿Cuáles son las ecuaciones de los ejes coordenados?

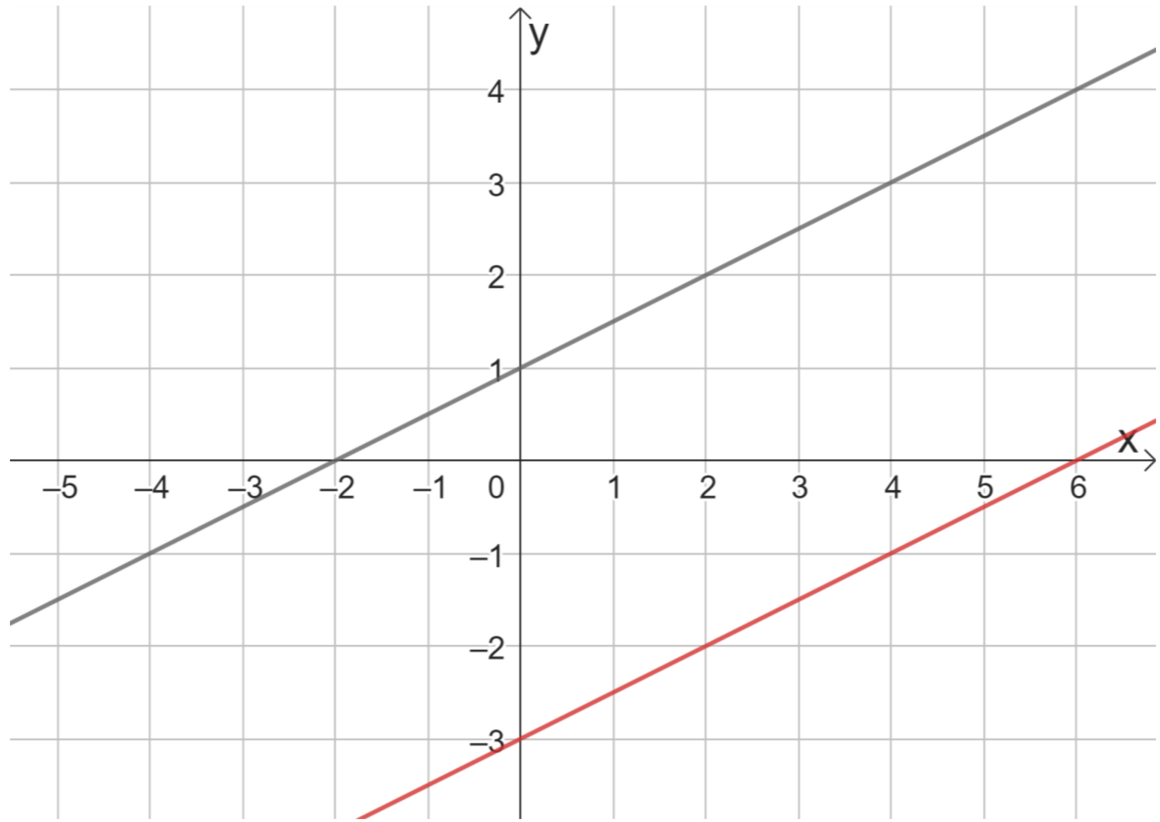
Esta foto de Autor desconocido está bajo licencia CC BY-NC-ND

Rectas paralelas

Imagen de Peggy and Marco Lachmann-Anke en Pixabay

DOS RECTAS SON PARALELAS SI TIENEN IGUAL PENDIENTE

$$\boxed{m_1 = m_2}$$

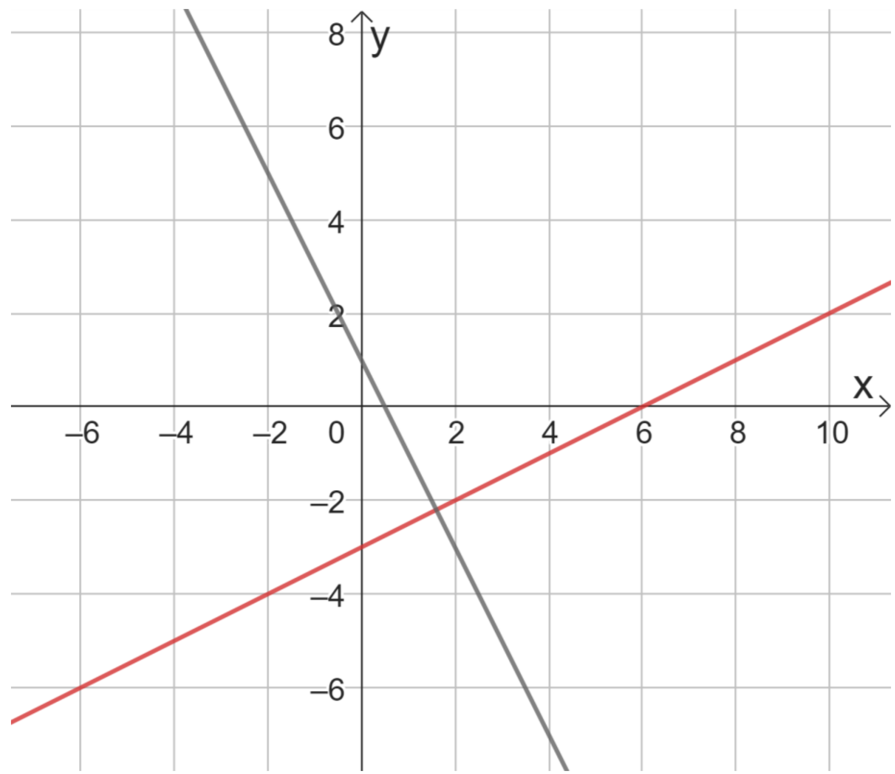


Rectas perpendiculares

DOS RECTAS SON PERPENDICULARES SI LA PENDIENTE DE UNA DE ELLAS ES INVERSA Y OPUESTA DE LA PENDIENTE DE LA OTRA

Imagen de Peggy and Marco Lachmann-Anke en Pixabay

$$m_1 = -\frac{1}{m_2}$$



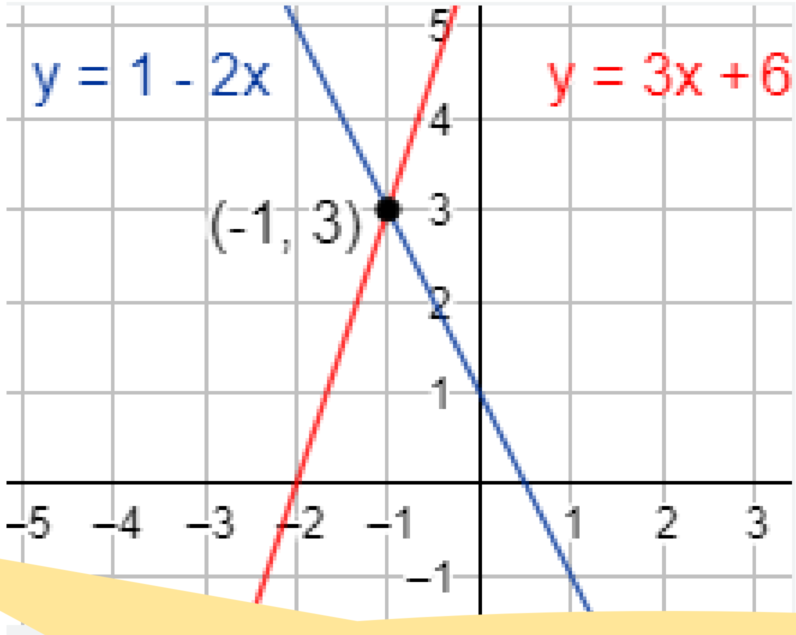
Ejemplos:

Hallar la ecuación de la recta que sea perpendicular a la recta de ecuación $y = 3x + 1$ y pasa por el punto $P_1(2,1)$

Hallar la ecuación de una recta que sea paralela a la recta de ecuación $y = -2x + 5$

Imagen
de 3dman_eu en Pixabay

Observemos …



¡ESTAS RECTAS SE CORTAN EN EL PUNTO (-1,3)!

¿Cómo puede determinarse en forma analítica que las rectas se cortan en un punto?

¡¡¡CON UN SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES CUYAS ECUACIONES SEAN LAS DE LAS RECTAS!!!

Matemática

Clase 10 – Martes 23-5

Facultad de Ciencias Agrarias y Forestales
UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PLATA

Cronograma

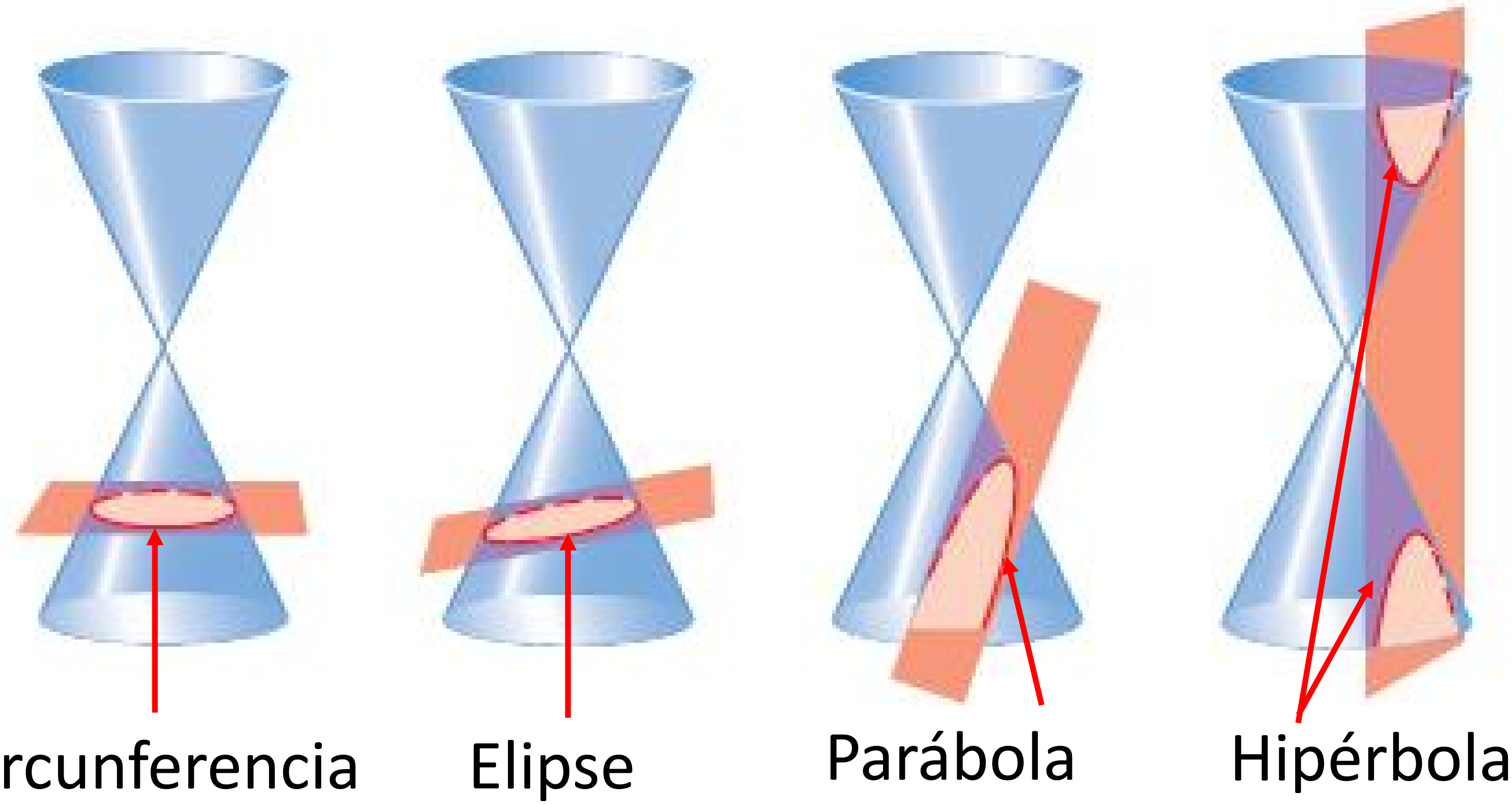
Clase	Semana	Tema de la Semana	Práctica	Feriados
10	22-may	Tema 7: Cónicas: Circunferencia. Elipse	Trabajo Práctico N°5: Cónicas	jueves 25/5 y viernes 26/5 feriados
11	29-may	Tema 7: Cónicas: Parábola. Hipérbola	Trabajo Práctico N°5: Cónicas	

Cónicas

¿Qué son las CÓNICAS?

Observemos …

Imagen de Peggy und Marco Lachmann-Anke en Pixabay



Las cónicas son curvas que se generan cuando se hace un corte recto en un cono

¿Dónde se encuentran las cónicas? ...

Imagen de Peggy und Marco Lachmann-Anke en Pixabay

Sus formas están ocultas en la estructura o trayectoria de muchas cosas...

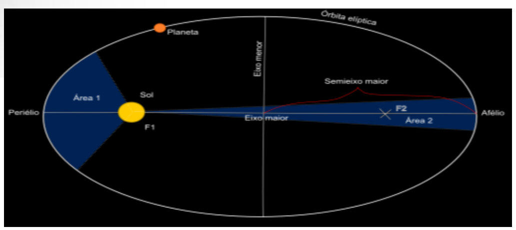


Imagen de WOtP bajo licencia Creative Commons

La órbita de un planeta es una elipse

Imagen de SpaceX-Imagery en Pixabay

La trayectoria del lanzamiento de un cohete es una parábola

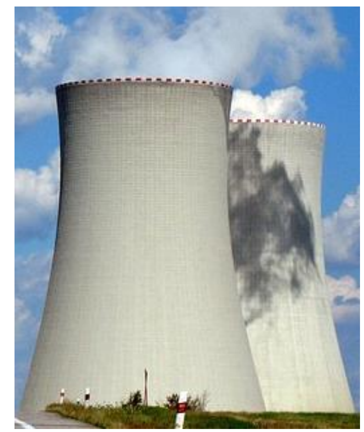


Imagen de Public Domain Pictures en Pixabay

La forma de una torre de enfriamiento es una hipérbola

Imagen de Peggy und Marco Lachmann-Anke en Pixabay

Cónicas

REPRESENTACÓN GRÁFICA

EXPRESIÓN ANALÍTICA

Gráfica

Ecuación

¿Qué vamos a estudiar esta semana y la próxima?

CÓNICAS

La ecuación general de todas las cónicas es una **ECUACIÓN CUADRÁTICA**

Es decir que su ecuación general se puede escribir como:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

donde A, B, C, D, E y F son números reales.

Dependiendo cuáles coeficientes aparezcan y cuáles sean cero, se obtiene la ecuación de una u otra de las cónicas

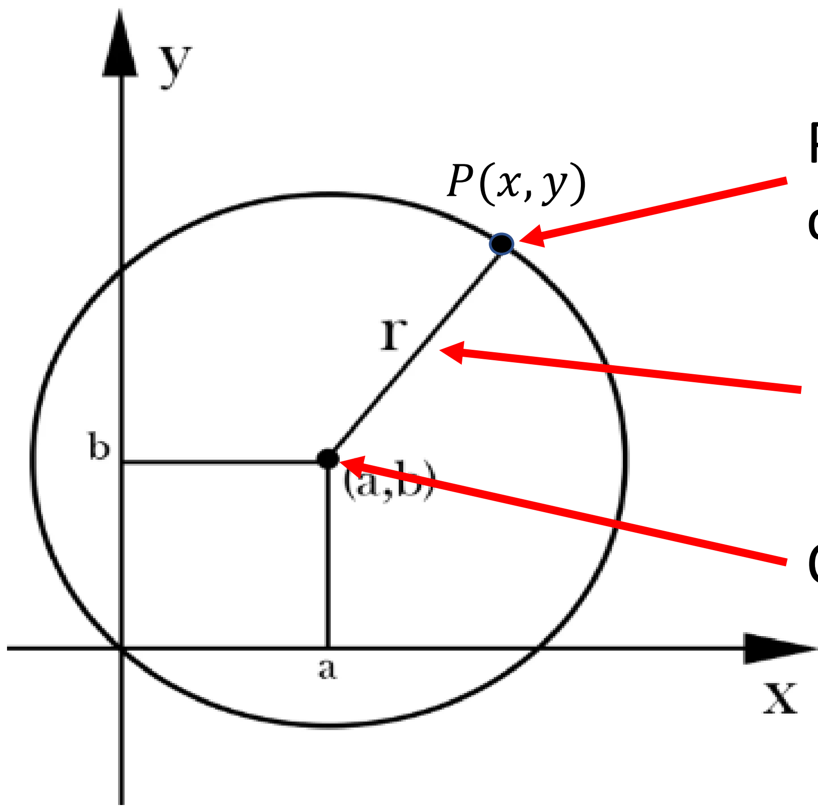
Imagen de Peggy and Marco Lachmann-Anke en Pixabay

CIRCUNFERENCIA

Son **TODOS** los puntos del plano que están a la misma **distancia** de un **punto fijo**.

Centro

Radio ***r***



Punto de la circunferencia

Radio: distancia de $P(x,y)$ a $C(a,b)$

Centro: $C(a,b)$

¿Cómo es la ecuación de la circunferencia?

Facultad de Ciencias Agrarias y Forestales
UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PLATA

¡Utilicemos la definición!

Sea una circunferencia con centro **C(a,b)** (punto fijo) y radio de valor **r** .

Si el punto **P(x,y)** pertenece a la circunferencia, entonces necesariamente se tiene que cumplir:

$$\boxed{d(P,C) = r}$$

¿Distancia entre dos puntos?

Imagen de 3dman_eu en Pixabay

$$d(P(x,y),C(a,b)) = r$$

$$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2} = r$$

$$(x-a)^2+(y-b)^2 = r^2$$

ECUACIÓN CANÓNICA

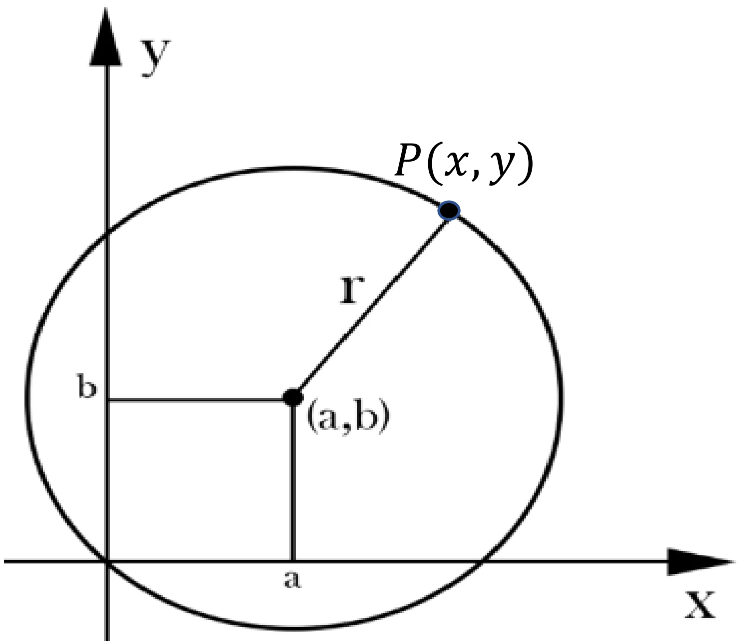
Imagen de Peggy and Marco Lachmann-Anke en Pixabay

Resumiendo…

CIRCUNFERENCIA CON CENTRO EN C(*a*,*b*) Y RADIO *r*:

Son **TODOS** los puntos del plano que están a una **distancia r** del punto fijo llamado **CENTRO C(*a*,*b*)**.

LA GRÁFICA



LA ECUACIÓN CANÓNICA

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$$

CIRCUNFERENCIA CON CENTRO EN C(*a*,*b*) Y RADIO *r*:

Para la circunferencia con C(a,b) y radio r, la ecuación canónica:

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$$

Que operando algebraicamente queda

¿Cuánto podía valer A, B, C, D, E y F?

$$x^2-2ax+a^2+y^2-2by+b^2-r^2=0$$

$$x^2+y^2-2ax-2by+\left(a^2+b^2-r^2\right)=0$$

$$\overset{A}{1}\cdot x^2+\overset{C}{1}\cdot y^2\overset{D}{-2a}\,x\overset{E}{-2b}\,y+\overbrace{\left(a^2+b^2-r^2\right)}^{F}=0$$

$$\boxed{Ax^2+Cy^2+Dx+Ey+F=0}$$

Es decir que …

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Imagen de Peggy and Marco Lachmann-Anke en Pixabay

Si la ecuación corresponde a una circunferencia, debe cumplir:

- ✓ *A=C,*
- ✓ *A y C distintos de cero,*
- ✓ *B=0*

Ejemplos:

¿Cuál es la ecuación de la circunferencia con centro en (1,-2) y radio 3? ¿El punto (-2,4) pertenece a la circunferencia?

Si el punto P(2,4) pertenece a una circunferencia de centro (1,2), ¿cuál es el radio? Grafique la circunferencia.

Determine el centro y el radio de la circunferencia cuya ecuación es $x^2 + 4x + y^2 - 6y + 8 = 0$

Imagen de 3dman_eu en Pixabay

Ejemplo:

De acuerdo con la gráfica, determine la ecuación de la circunferencia.

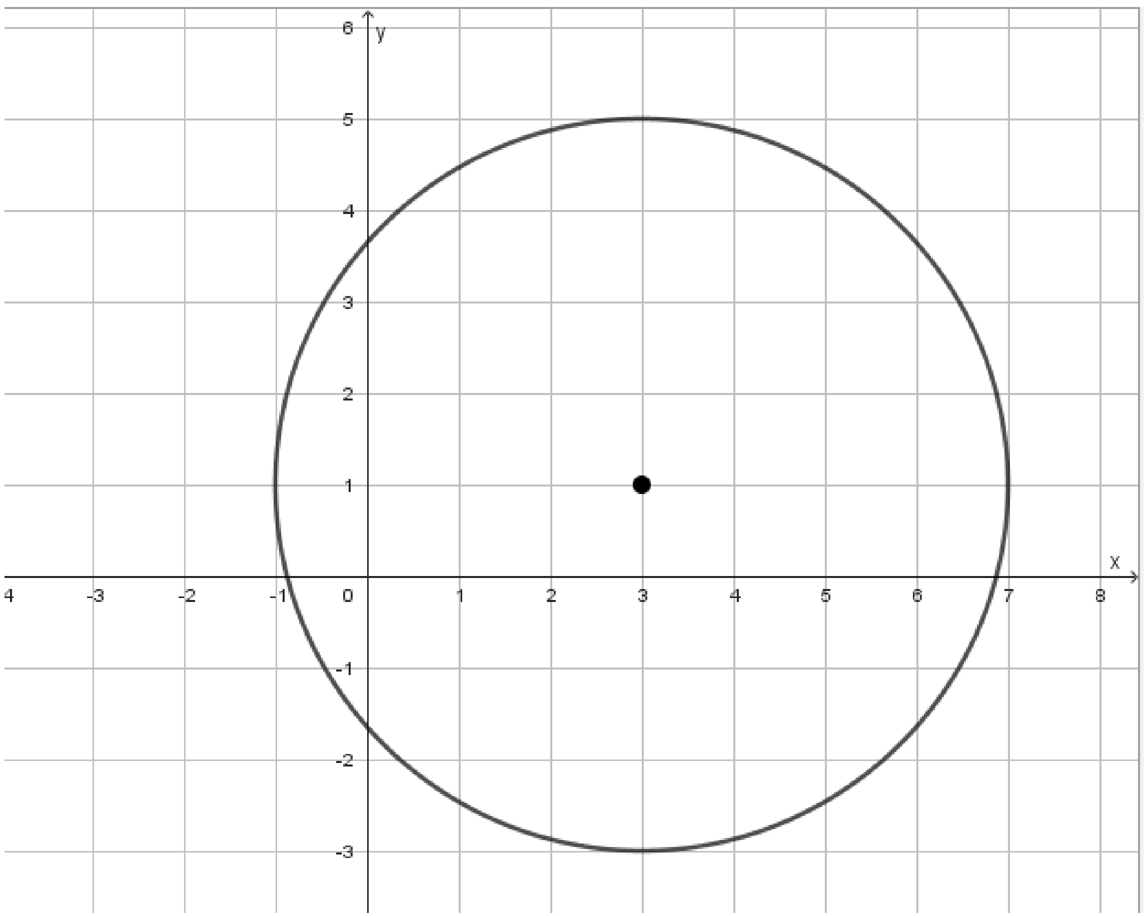


Imagen de 3dman_eu en Pixabay

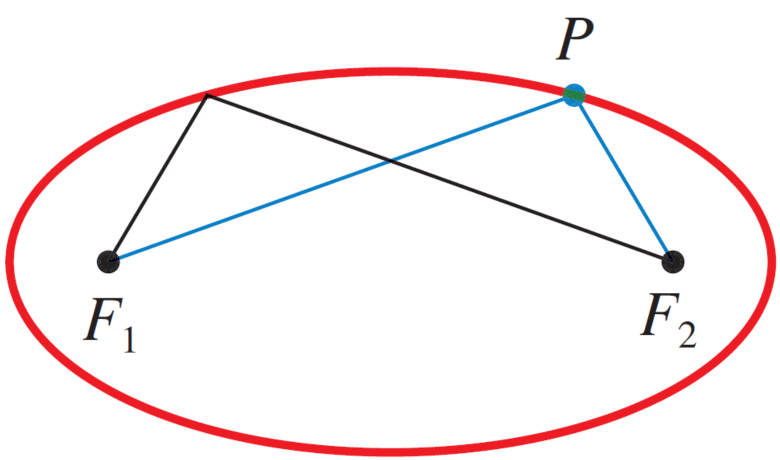
ELIPSE

IDEA: Es una curva ovalada que se asemeja a una circunferencia alargada.

Definición

Es el conjunto de **TODOS** los puntos del plano cuya suma de sus distancias a dos **puntos fijos** F_1 y F_2 es una constante.

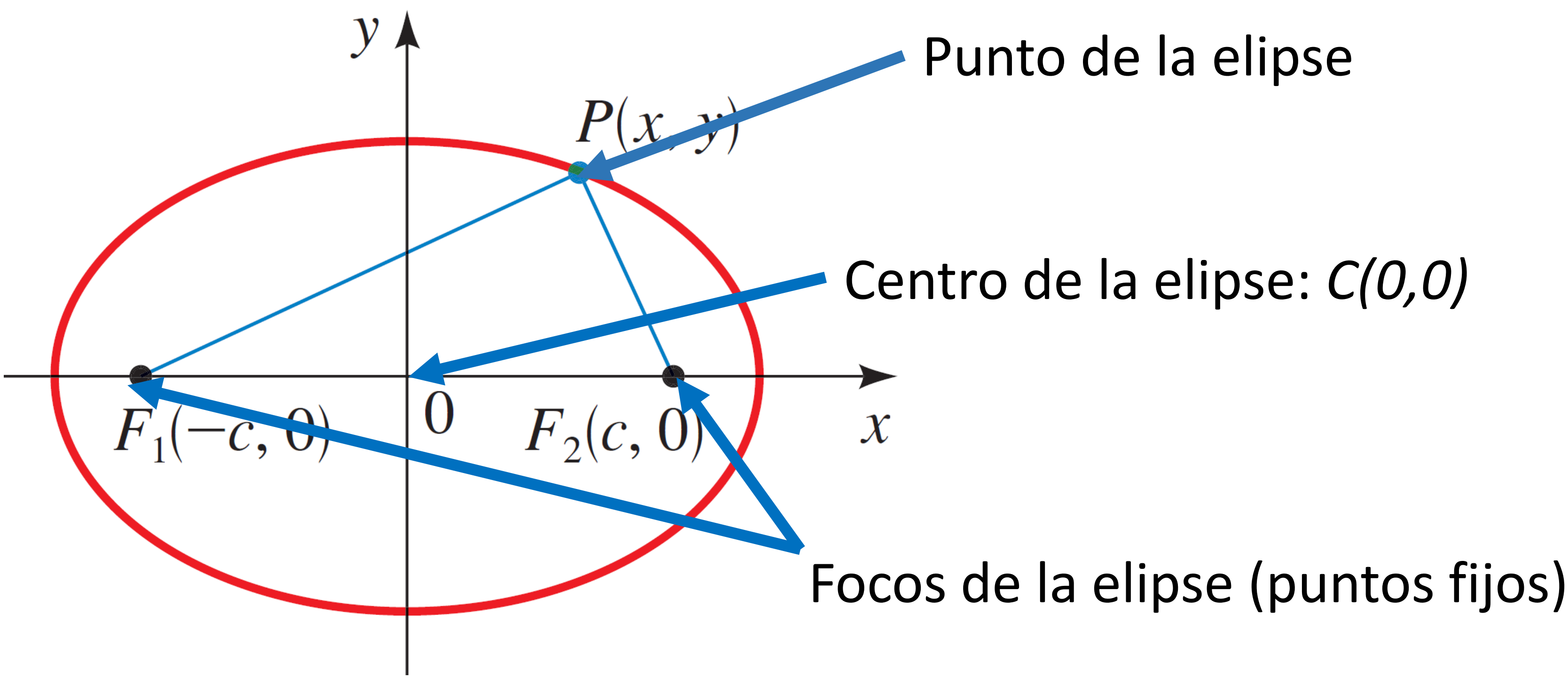
Focos



ELIPSE

Elipse de centro en el origen C(0,0) y focos sobre el eje *x*: $F_1(-c,0)$ y $F_2(c,0)$:

Gráfica



¿Cómo es la ecuación de la elipse?

¡Utilicemos la definición!

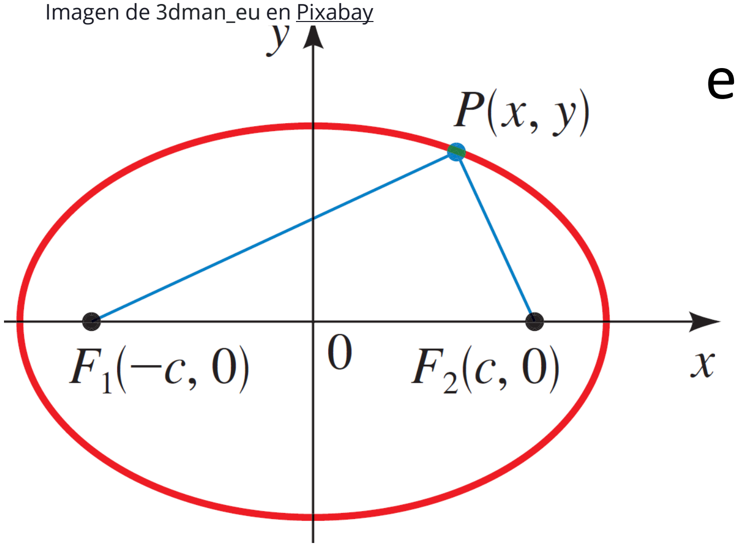
Pensemos cómo sería encontrar la ecuación de una elipse con centro en el origen de coordenadas y focos sobre el eje x

Imagen de 3dman_eu en Pixabay

Sea una elipse con focos sobre el eje x: $\boldsymbol{F_1(-c,0)}$ y $\boldsymbol{F_2(c,0)}$ y supongamos que llamamos 2a, a la distancia mencionada en la definición

Si el punto $\boldsymbol{P(x,y)}$ pertenece a la elipse, entonces necesariamente se tiene que cumplir:

$$\boxed{d\left(P,F_1\right)+d\left(P,F_2\right)=2a}$$



$F_1(-c,0)$
$F_2(c,0)$

$$d(P,F_1)+d(P,F_2)=2a$$

$$\sqrt{(x-(-c))^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a$$

Otra vez…distancia entre dos puntos

Imagen de Peggy and Marco Lachmann-Anke en Pixabay

Operando cuidadosamente se llega a la ecuación canónica de la elipse con centro en el origen y focos $F_1(-c,0)$ y $F_2(c,0)$:

Imagen de Peggy and Marco Lachmann-Anke en Pixabay

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

$$\begin{cases} a>0 \\ b>0 \\ a^2=b^2+c^2 \end{cases}$$

ELIPSE

Elementos de una elipse

Elipse de centro en el origen $\boldsymbol{C}(\mathbf{0},\mathbf{0})$ y focos sobre el eje x: $\boldsymbol{F_1}(-\boldsymbol{c},\mathbf{0})$ y $\boldsymbol{F_2}(\mathbf{c},\mathbf{0})$.

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

$$a>0 \text{ y } b>0$$

$$a^2=b^2+c^2$$

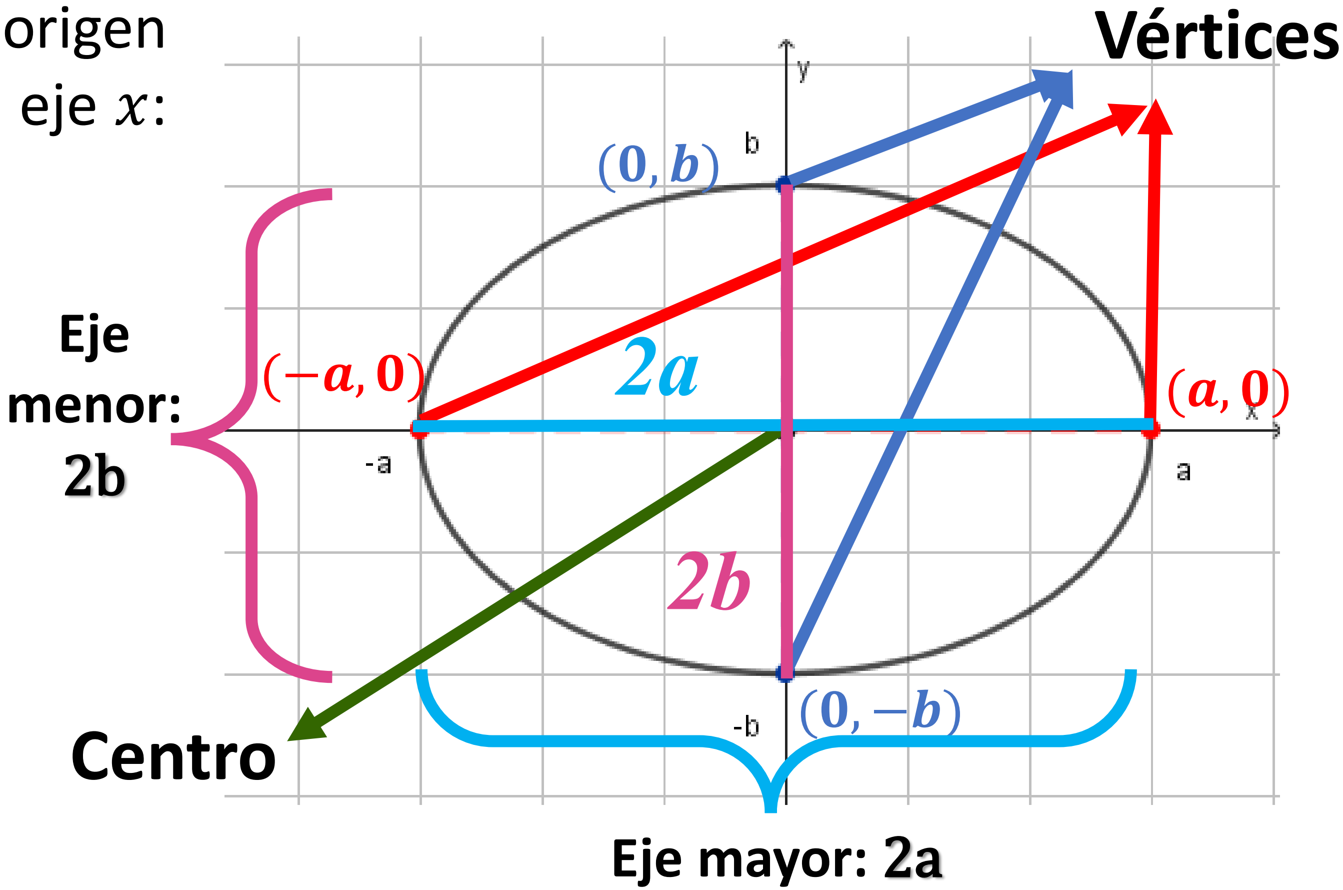
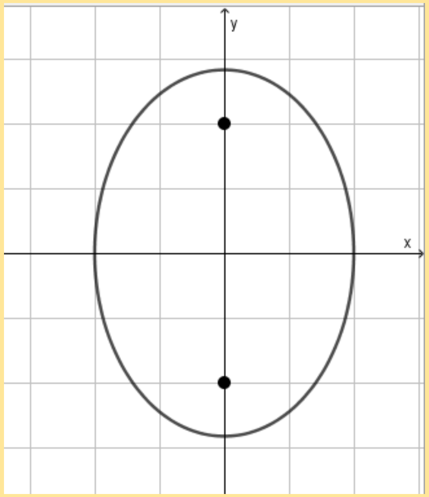


Imagen de Peggy and Marco Lachmann-Anke en Pixabay

¡¡Pero las elipses también pueden ser verticales!!!



...Y LA ECUACIÓN ES LA MISMA!!!

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

$$\begin{cases} a>0 \\ b>0 \\ b^2=a^2+c^2 \end{cases}$$

Esta foto de Autor desconocido está bajo licencia CC BY-NC-ND

Entonces, ¿cómo nos damos cuenta si la elipse es horizontal o vertical?

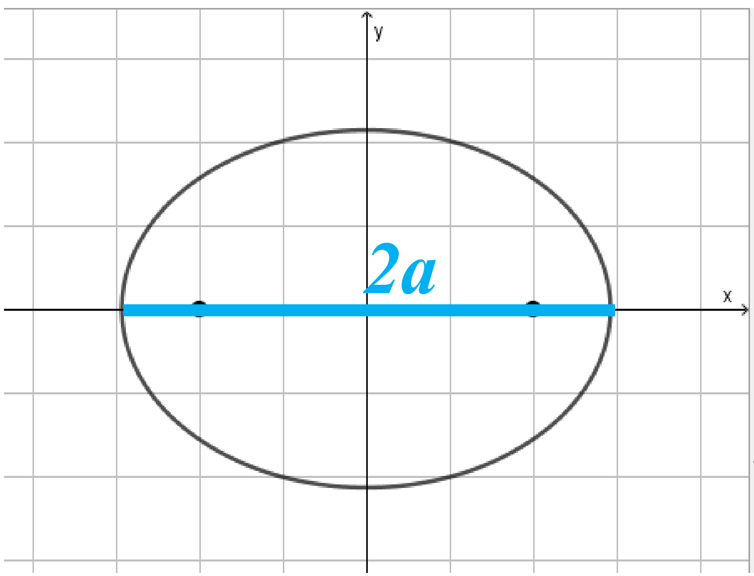
Imagen de Peggy and Marco Lachmann-Anke en Pixabay

¡¡¡Depende que si ***a*** es mayor o menor que ***b***!!!

Resumiendo…

ELIPSE **HORIZOTAL** CON CENTRO EN C(*0,0*):

LA GRÁFICA



Elipse horizontal: el eje mayor está sobre el eje x.

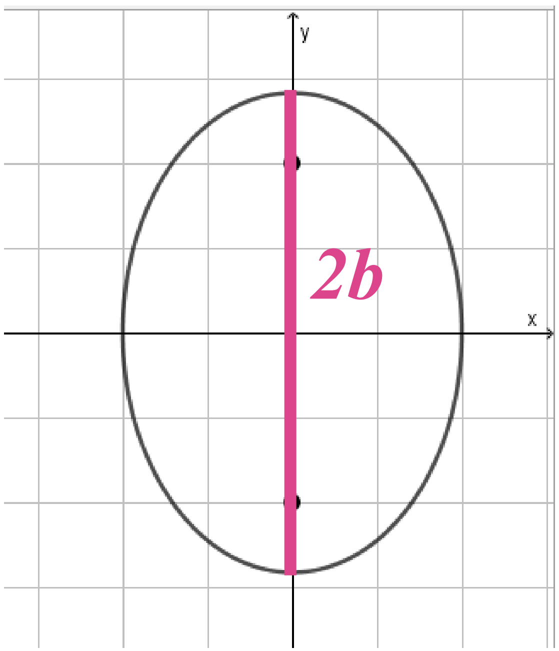
LA ECUACIÓN CANÓNICA

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad \begin{cases} a>0 \\ b>0 \\ a^2=b^2+c^2 \end{cases}$$

Elipse horizontal: $a>b$

ELIPSE **VERTICAL** CON CENTRO EN C(*0,0*):

LA GRÁFICA



<u>Elipse vertical</u>: el eje mayor está sobre el eje y.

LA ECUACIÓN CANÓNICA

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad \begin{cases} a > 0 \\ b > 0 \\ b^2 = a^2 + c^2 \end{cases}$$

<u>Elipse vertical</u>: $a < b$

Así como las circunferencias pueden estar centradas en cualquier punto del plano, las elipses también.

LA ECUACIÓN CANÓNICA DE LA ELIPSE CENTRADA EN EL PUNTO $C(h,k)$ ES:

Elipse horizontal:

$$a > b$$

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

Elipse vertical:

$$a < b$$

Para la elipse con dentro en $C(h,k)$:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1^2$$

Operando algebraicamente queda:

$$\frac{1}{a^2}\left(x^2-2hx+h^2\right)+\frac{1}{b^2}\left(y^2-2ky+k^2\right)-1=0$$

$$\overset{A}{\frac{1}{a^2}}x^2+\overset{C}{\frac{1}{b^2}}y^2-\overset{D}{\frac{2h}{a^2}}x-\overset{E}{\frac{2k}{b^2}}y+\overbrace{\left(\frac{h^2}{a^2}+\frac{k^2}{b^2}-1\right)}^{F}=0$$

¿Cuánto puede valer A, B, C, D, E y F?

$$\boxed{Ax^2+Cy^2+Dx+Ey+F=0}$$

Es decir que …

Imagen de Peggy and Marco Lachmann-Anke en Pixabay

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Si la ecuación corresponde a una elipse, debe cumplir:

- ✓ A≠C, *pero del mismo signo*
- ✓ *A y C distintos de cero,*
- ✓ *B=0*

Ejemplos:

¿El punto P(2,3) pertenece a la elipse de ecuación $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}$
1?

Graficar la elipse de ecuación $\frac{(x-1)^2}{4}+\frac{(y+2)^2}{25}=1$?

Determinar la ecuación canónica de la elipse cuya ecuación cuadrática está dada por $16x^2+9y^2-18y-135=0$

Imagen de 3dman_eu en Pixabay

Ejemplo:

De acuerdo con la gráfica, determinar la ecuación de la elipse.

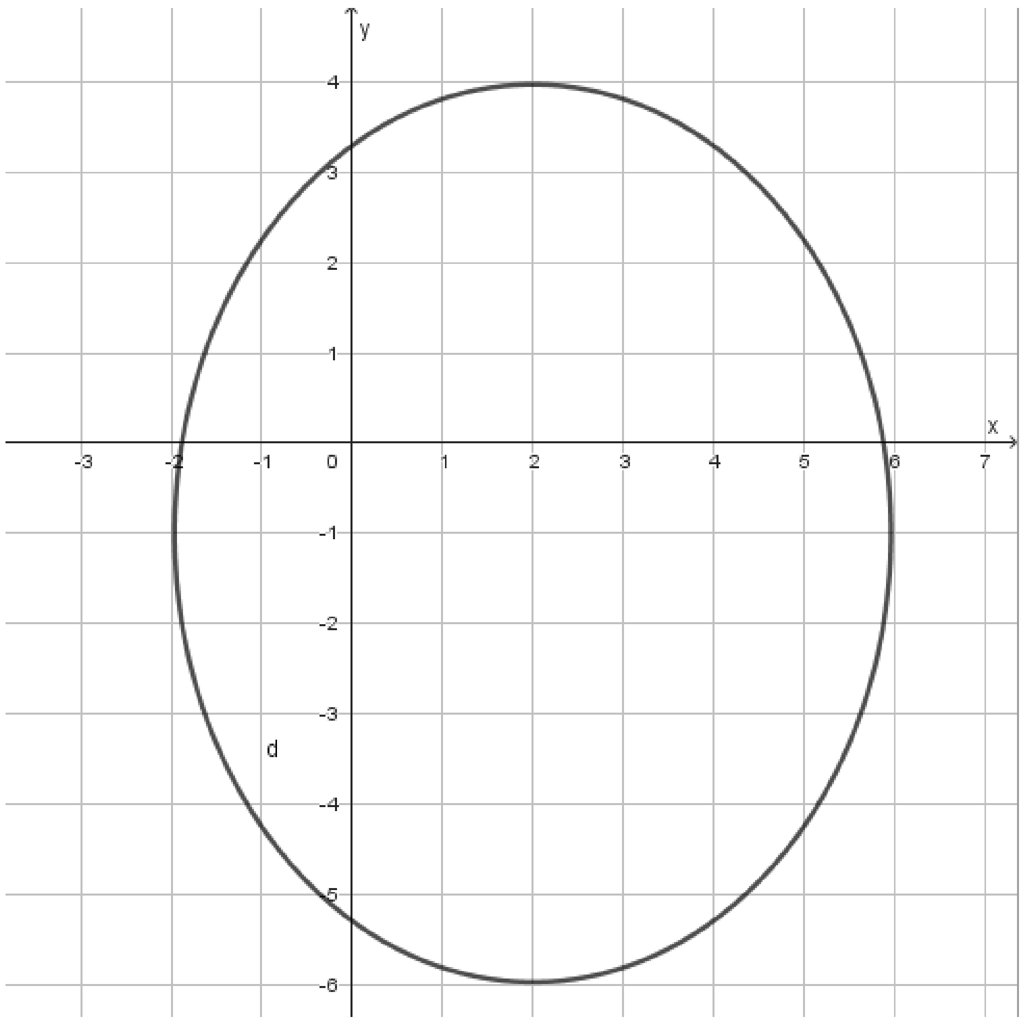


Imagen de 3dman_eu en Pixabay

Matemática

Clase 11 – Martes 30-5

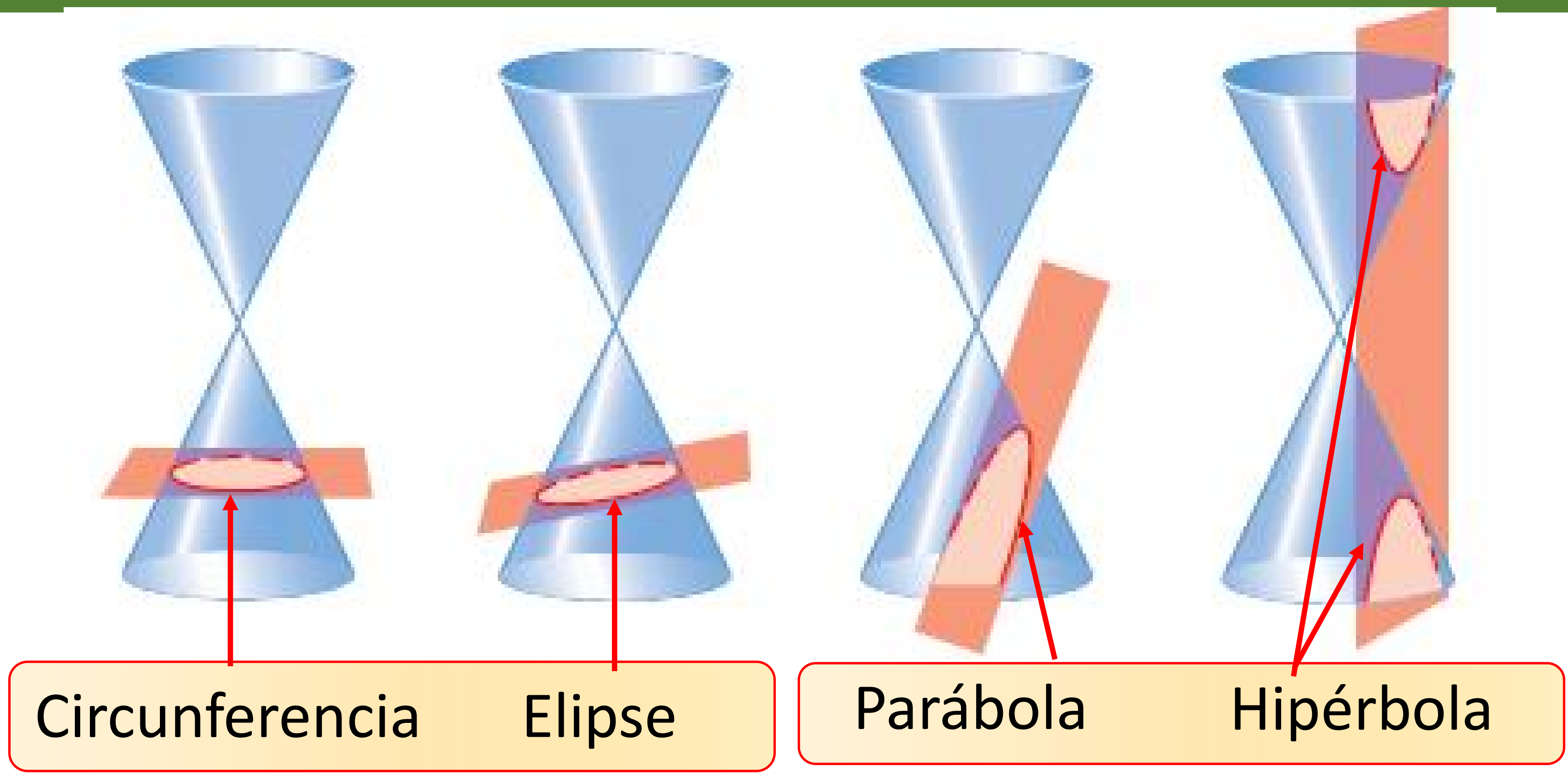
Facultad de Ciencias Agrarias y Forestales

Universidad Nacional de La Plata

Cronograma

10	22-may	Tema 7: Cónicas: Circunferencia. Elipse	Trabajo Práctico N°5: Cónicas
11	29-may	Tema 7: Cónicas: Parábola. Hipérbola	Trabajo Práctico N°5: Cónicas

Cónicas



La clase pasada vimos…

Vemos hoy…

Imagen de Peggy and Marco Lachmann-Anke en Pixabay

CÓNICAS

La ecuación general de todas las cónicas es una **ECUACIÓN CUADRÁTICA**

Es decir que su ecuación general se puede escribir como:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

donde A, B, C, D, E y F son números reales.

Dependiendo cuáles coeficientes aparezcan y cuáles sean cero, se obtiene la ecuación de una u otra de las cónicas

La semana pasada vimos que …

Para una circunferencia con centro en $C(a, b)$ y radio r …

Ecuación canónica $\rightarrow$ $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$

Que operando algebraicamente queda:

$$x^2-2ax+a^2+y^2-2by+b^2-r^2=0$$

$$x^2+y^2-2ax-2by+\left(a^2+b^2-r^2\right)=0$$

$$\overset{A}{1}\cdot x^2+\overset{C}{1}\cdot y^2\overset{D}{-2a}\,x\overset{E}{-2b}\,y+\overbrace{\left(a^2+b^2-r^2\right)}^{F}=0$$

$$\boxed{Ax^2+Cy^2+Dx+Ey+F=0}$$

¿Cuánto podía valer A, B, C, D, E y F?

También vimos que …

Para una elipse con centro en $C(h,k)$ …

Ecuación canónica

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1^2$$

Que operando algebraicamente queda

¿Cuánto podía valer A, B, C, D, E y F?

$$\frac{1}{a^2}\left(x^2-2hx+h^2\right)+\frac{1}{b^2}\left(y^2-2ky+k^2\right)-1=0$$

$$\overbrace{\frac{1}{a^2}}^{A}x^2+\overbrace{\frac{1}{b^2}}^{C}y^2\overbrace{-\frac{2h}{a^2}}^{D}x\overbrace{-\frac{2k}{b^2}}^{E}y+\overbrace{\left(\frac{h^2}{a^2}+\frac{k^2}{b^2}-1\right)}^{F}=0$$

$$\boxed{Ax^2+Cy^2+Dx+Ey+F=0}$$

¡Sigamos viendo cómo son las ecuaciones de las demás cónicas!

Imagen de Peggy and Marco Lachmann-Anke en Pixabay

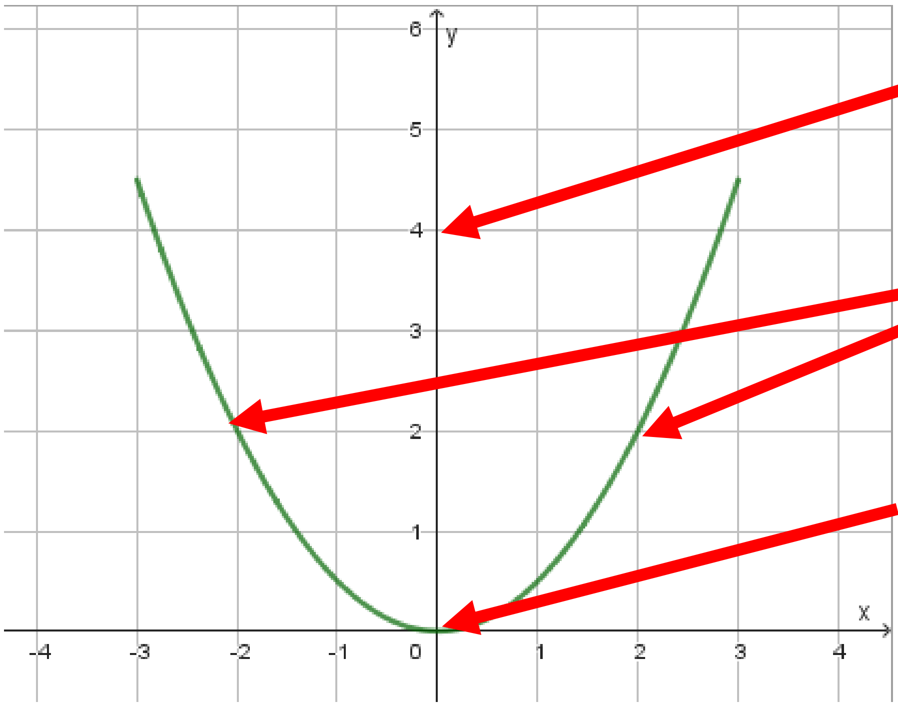
PARÁBOLA

Una parábola es el conjunto de **TODOS** los puntos del plano que verifican la ecuación:

$$y = ax^2$$

a es un número real distinto de cero

Gráfica



Eje de simetría (En este caso es vertical)

Ramas de la parábola

Vértice de la parábola: $V(0,0)$

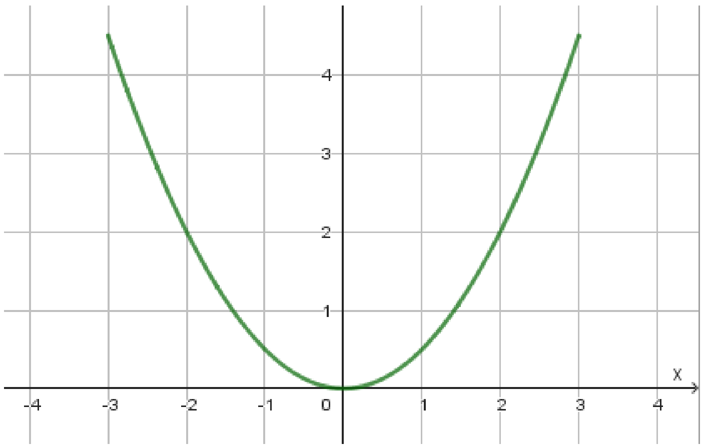
¿Cómo influye el valor de a en la ecuación $y = ax^2$?

...GeoGebra...

PARÁBOLA DE **EJE VERTICAL** Y VÉRTICE EN $V(0,0)$:

LA GRÁFICA

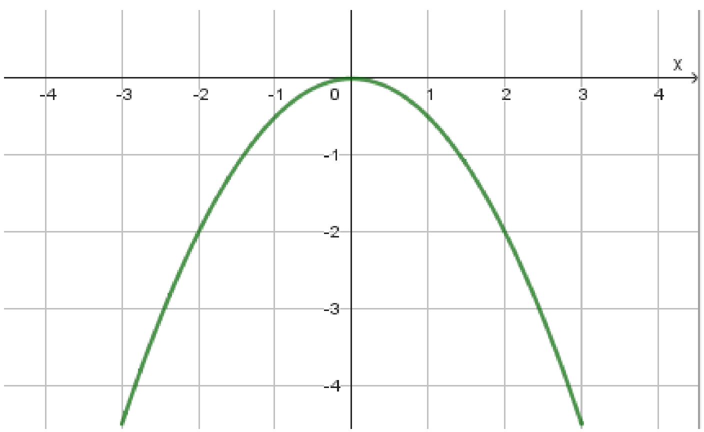
LA ECUACIÓN CANÓNICA



Ramas hacia arriba

$$a > 0$$

$$y = ax^2$$



Ramas hacia abajo

$$a < 0$$

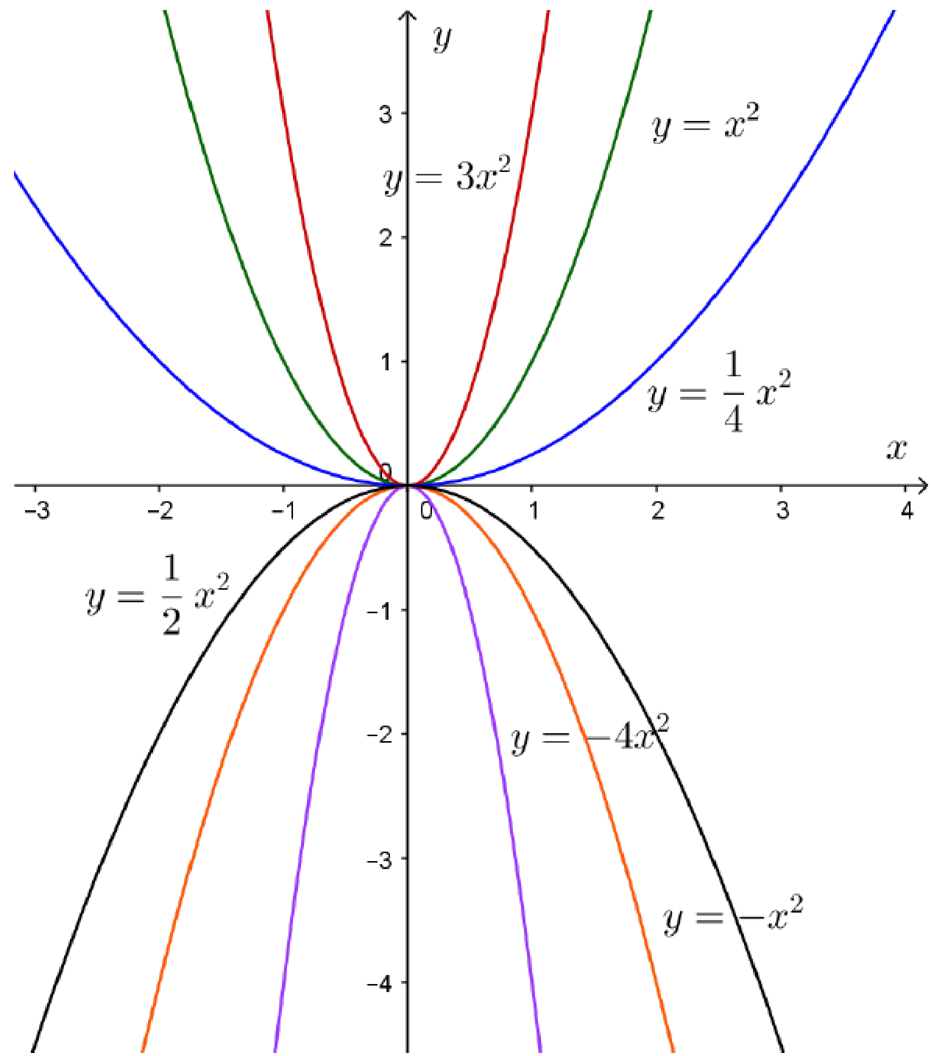
PARÁBOLA DE **EJE VERTICAL** Y VÉRTICE EN $V(0,0)$:

Para valores absolutos de a más chicos

Más abierta es la parábola

Para valores absolutos de a más grandes

Más cerrada es la parábola



¿Qué diferencia hay entre la ecuación

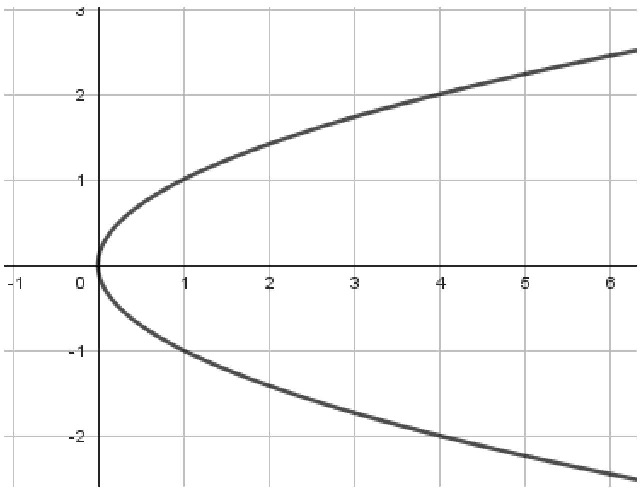
$$y = ax^2$$

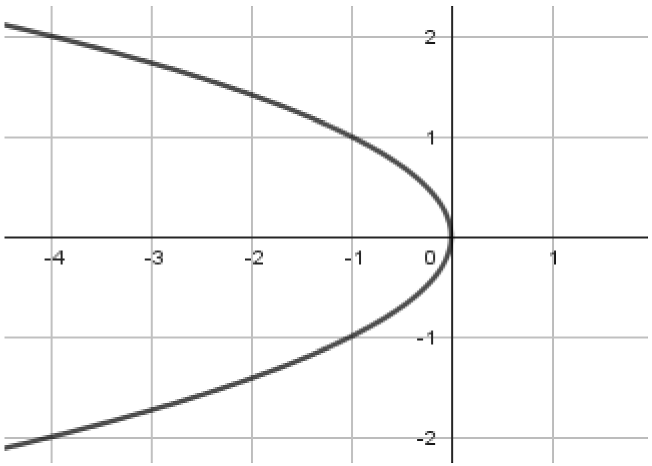
y la ecuación

$$x = ay^2?$$

PARÁBOLA DE **EJE HORIZONTAL** Y VÉRTICE EN $V(0,0)$:

LA GRÁFICA





LA ECUACIÓN CANÓNICA

Ramas hacia derecha

$a > 0$

$$x = ay^2$$

Ramas hacia izquierda

$a < 0$

Las parábolas pueden tener su vértice en cualquier punto del plano no solamente en el origen…
Entonces…

LA ECUACIÓN CANÓNICA DE LA PARÁBOLA VERTICAL, CUYO VÉRTICE ES EL PUNTO $V(h,k)$ ES:

$$y-k=a\left(x-h\right)^2$$

Y ahora la ecuación de la parábola con ramas horizontales si el centro no es el origen de coordenadas…

LA ECUACIÓN CANÓNICA DE LA PARÁBOLA HORIZONTAL, CUYO VÉRTICE ES EL PUNTO $V(h,k)$ ES:

$$x-h=a\left(y-k\right)^2$$

PARÁBOLA

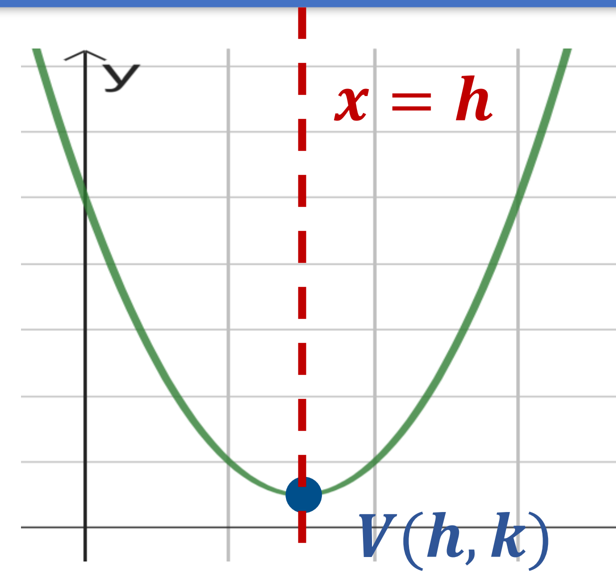
Elementos de una parábola

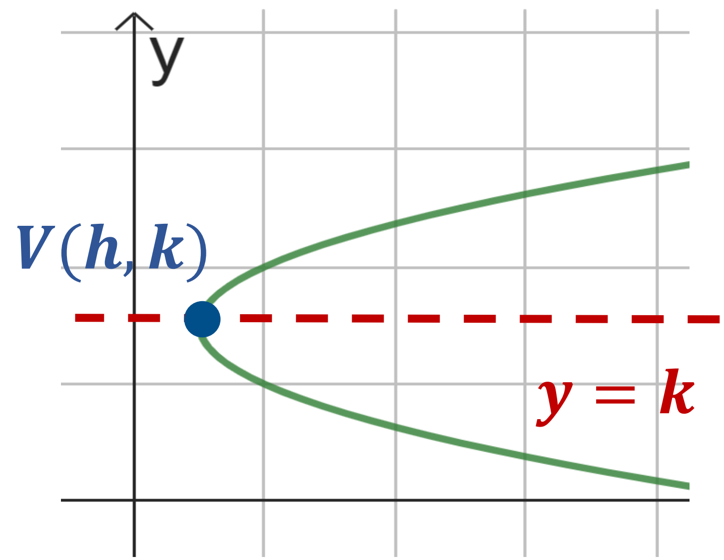
Vértice: $\boldsymbol{V(h,k)}$

Eje de simetría:

Recta: $\boldsymbol{x = h}$ (parábola vertical)

Recta: $\boldsymbol{y = k}$ (parábola horizontal)





La ecuación general de todas las cónicas dijimos que es una **ECUACIÓN CUADRÁTICA**

Imagen de Peggy and Marco Lachmann-Anke en Pixabay

Es decir que su ecuación general se puede escribir como:

$$Ax^2 + \cancel{Bxy} + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

donde A, B, C, D, E y F son números reales.

Analicemos cuáles de los coeficientes son distintos de cero para cada una de las parábolas vistas

Entonces tenemos que …

Para una parábola de eje vertical con vértice en $V(h, k)$

Ecuación canónica → $y - k = a(x-h)^2$

Operando algebraicamente queda:

$$y - k = a\left(x^2 - 2hx + h^2\right)$$

$$ax^2 - 2ahx - y + \left(h^2 + k\right) = 0$$

$$\overset{A}{a}\,x^2 \overset{D}{-2ah}\,x \overset{E}{-1}\,y + \overbrace{\left(h^2 + k\right)}^{F} = 0$$

$$\boxed{Ax^2 + \cancel{Cy^2} + Dx + Ey + F = 0}$$

¿Cuánto pueden valer A, B, C, D, E y F?

Si en cambio la parábola es de eje horizontal…

Para una parábola de eje horizontal con vértice en $V(h,k)$

Ecuación canónica

$$x-h=a(y-k)^2$$

Operando algebraicamente de manera similar que para el caso anterior …

¿Cuánto podrá valer A, B, C, D, E y F?

$$x-h=a\left(y^2-2hy+k^2\right)$$

$$ay^2-2aky-x+\left(k^2+h\right)=0$$

$$\overset{C}{a}\,y^2\overset{D}{-1}x\overset{E}{-2ak}\,y+\overbrace{\left(k^2+h\right)}^{F}=0$$

$$\boxed{\cancel{Ax^2}+Cy^2+Dx+Ey+F=0}$$

Imagen de Peggy and Marco Lachmann-Anke en Pixabay

Es decir que …

$$Ax^2 + \cancel{Bxy} + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Si la ecuación corresponde a una PARÁBOLA de eje vertical, debe cumplir:

- ✓ $A \neq 0$
- ✓ $C = 0$

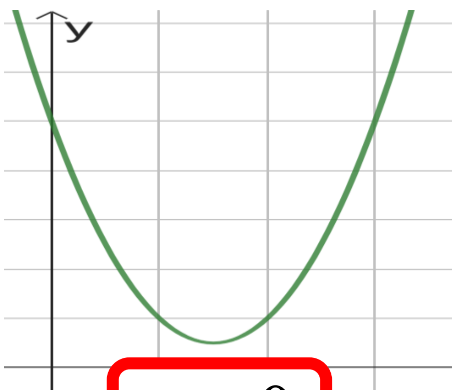
Si la ecuación corresponde a una PARÁBOLA de eje horizontal, debe cumplir:

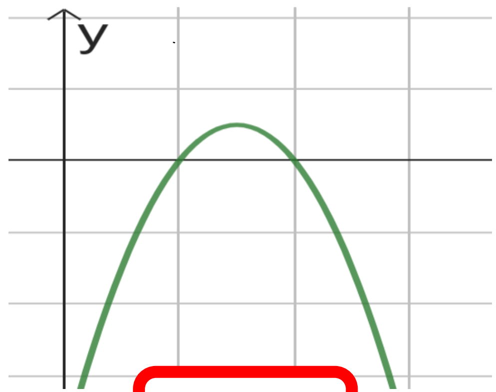
- ✓ $A = 0$
- ✓ $C \neq 0$

Resumiendo…

PARÁBOLA CON VÉRTICE EN $V(h,k)$:

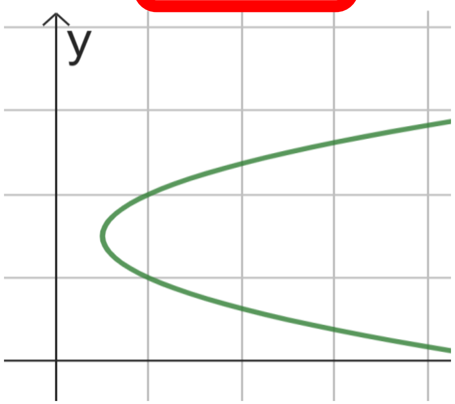
LA GRÁFICA

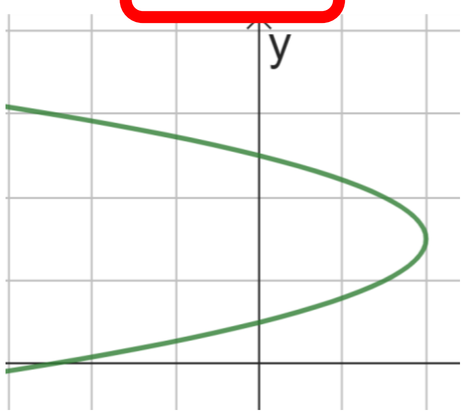




$a>0$

$a<0$





LA ECUACIÓN CANÓNICA

Eje VERTICAL

$$y-k=a\left(x-h\right)^2$$

Eje HORIZONTAL

$$x-h=a\left(y-k\right)^2$$

Ejemplos:

Determine si el punto P(2,4) pertenece a la parábola de ecuación $x - 1 = -3(y + 2)^2$. Graficar.

Determine la ecuación de una parábola con vértice en V(1,3) y con ramas verticales hacia arriba.

Determine la ecuación canónica de la parábola cuya ecuación cuadrática está dada por:

$$8x^2 + 8x - 2y + 14 = 0$$

Imagen de 3dman_eu en Pixabay

Ejemplo:

De acuerdo con la gráfica, determine la ecuación de la parábola.

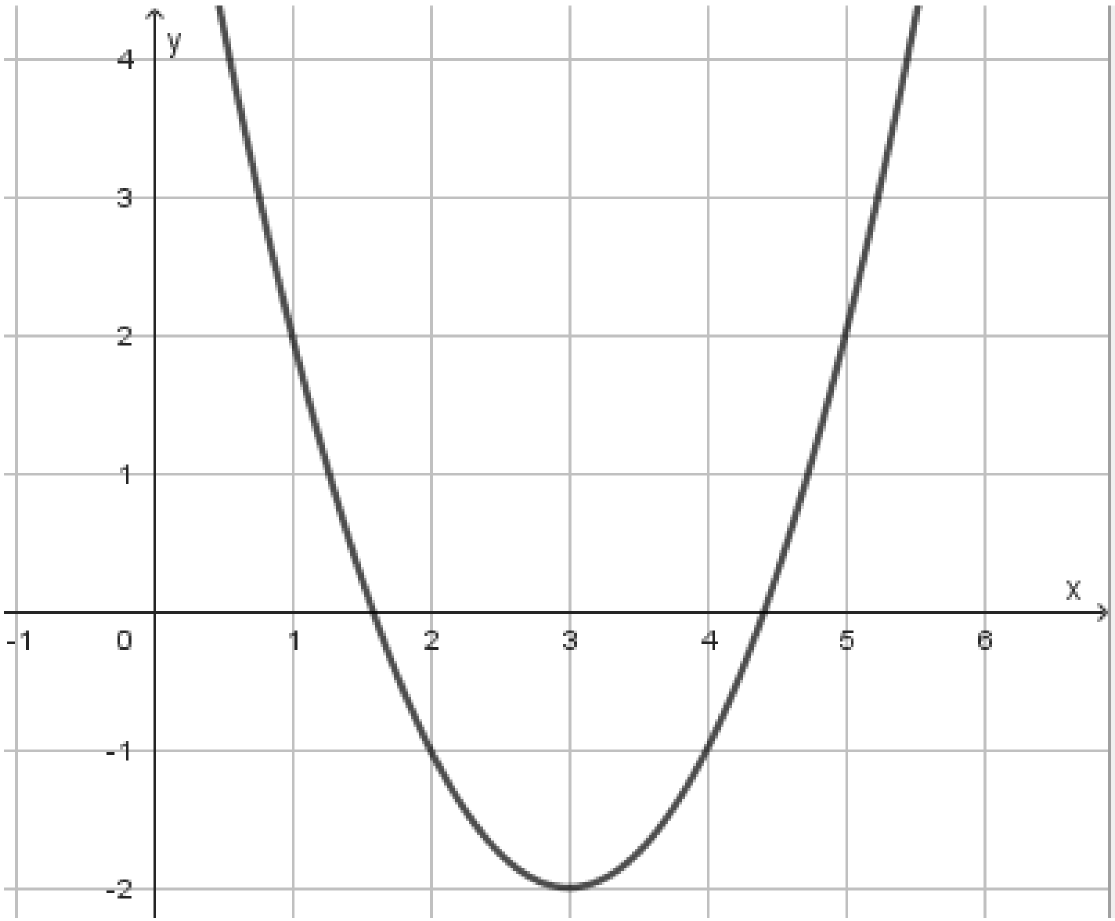


Imagen de 3dman_eu en Pixabay

HIPÉRBOLA

Una hipérbola es el conjunto de **TODOS** puntos del plano que verifican la ecuación:

$$xy = \pm t^2$$

t es un número real distinto de cero

¿Cómo se grafica una hipérbola??

GeoGebra

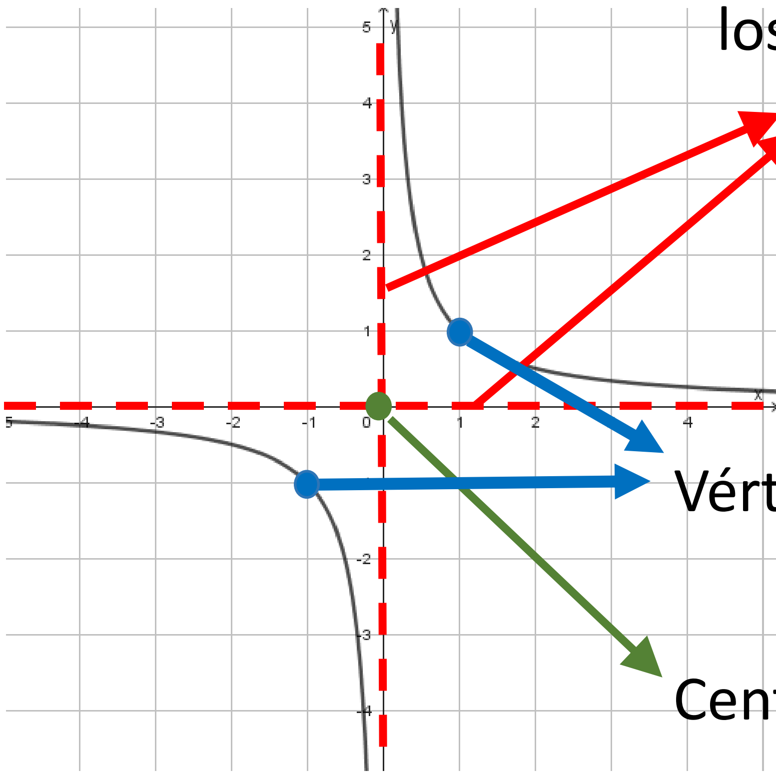
HIPÉRBOLA

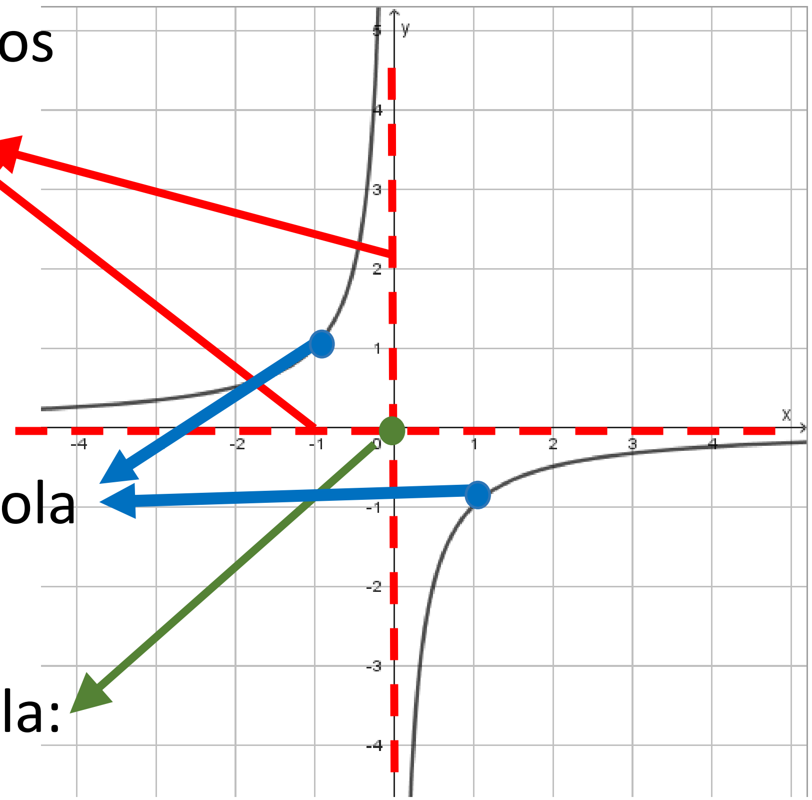
Gráfica

$$xy = t^2$$

$$xy = -t^2$$

Asíntotas de la hipérbola: los ejes coordenados (x=0, y=0)





Vértices de la hipérbola

Centro de la hipérbola: EL ORIGEN

HIPÉRBOLA

Elementos de una hipérbola con centro en C(0,0)

$$xy = t^2$$

Centro: $\boldsymbol{C(0,0)}$

Asíntotas:

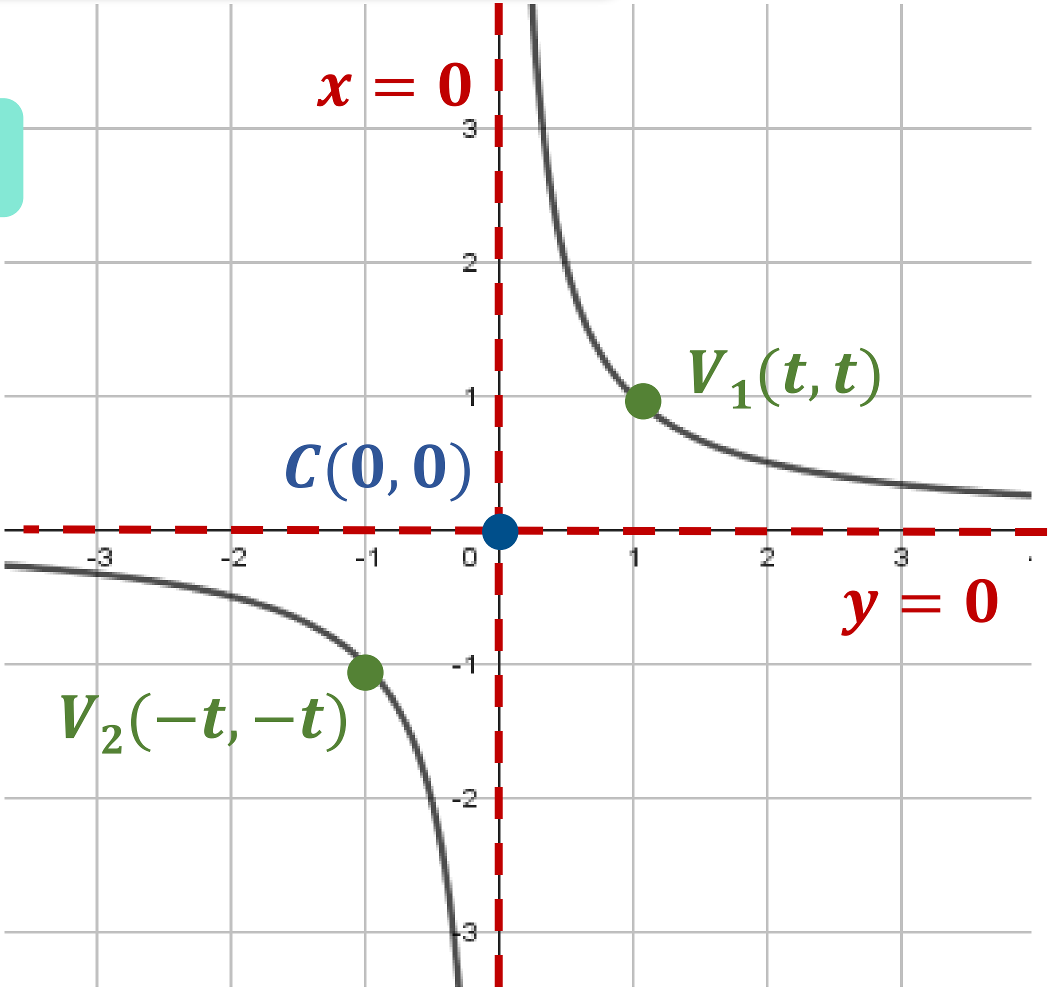
Recta: $\boldsymbol{x = 0}$

Recta: $\boldsymbol{y = 0}$

Vértices:

Para la hipérbola $\boldsymbol{yx = t^2}$

$\boldsymbol{V_1(t,t)}$ y $\boldsymbol{V_2(-t,-t)}$



HIPÉRBOLA

Elementos de una hipérbola con centro en C(0,0)

$$xy = t^2$$

$$xy = -t^2$$

Centro: $\boldsymbol{C(0,0)}$

Asíntotas:

Recta: $\boldsymbol{x = 0}$

Recta: $\boldsymbol{y = 0}$

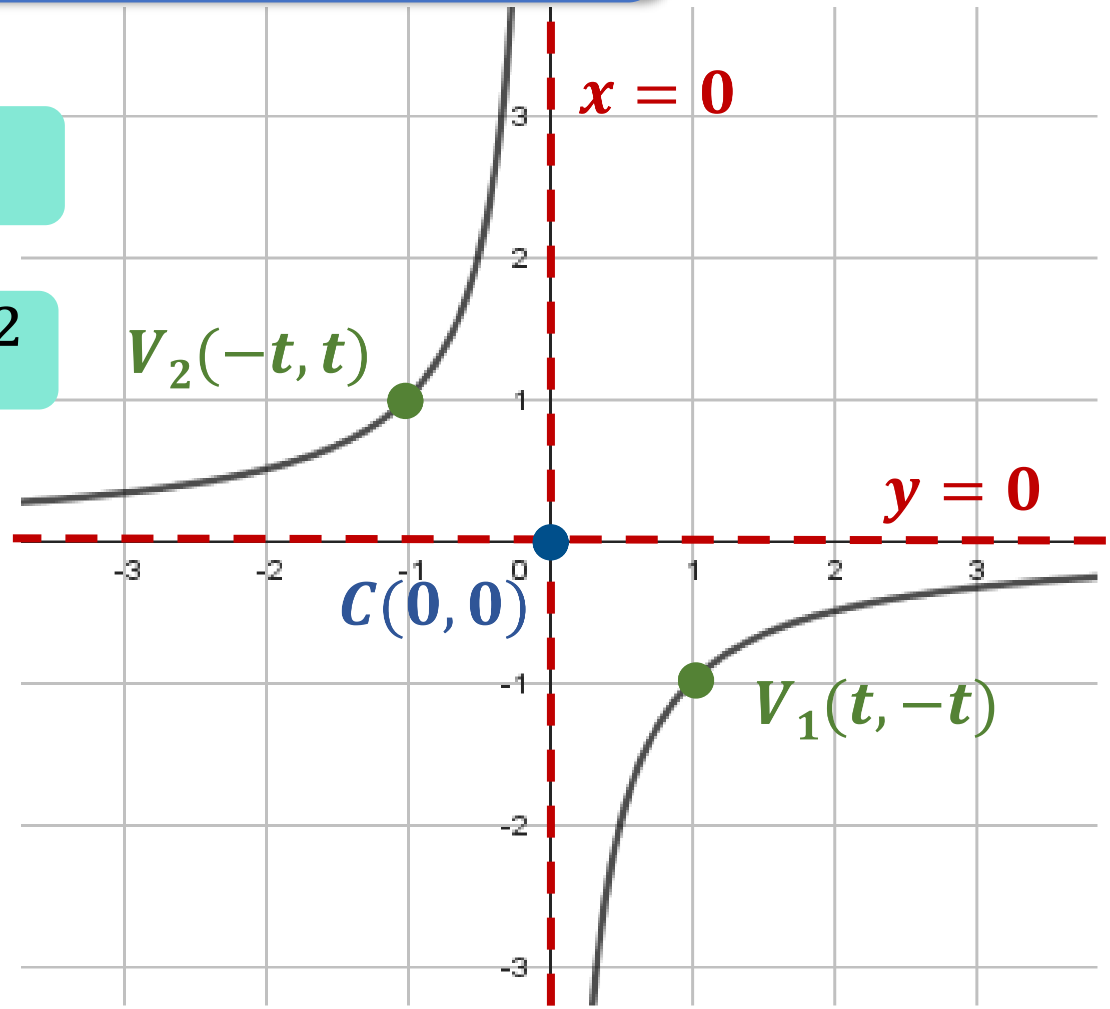
Vértices:

Para la hipérbola $\boldsymbol{yx = t^2}$

$\boldsymbol{V_1(t,t)}$ y $\boldsymbol{V_2(-t,-t)}$

Para la hipérbola $\boldsymbol{yx = -t^2}$

$\boldsymbol{V_1(t,-t)}$ y $\boldsymbol{V_2(-t,t)}$



Y ahora la ecuación de la hipérbola
si el centro no es el origen

LA ECUACIÓN DE LA HIPÉRBOLA CUYO CENTRO ES EL PUNTO $C(h,k)$ ES:

$$(x-h)(y-k)=\pm\, t^2$$

¡Cambian las asíntotas y los vértices!

HIPÉRBOLA

Elementos de una hipérbola con centro en $C(h,k)$

$$(x-h)(y-k)=t^2$$

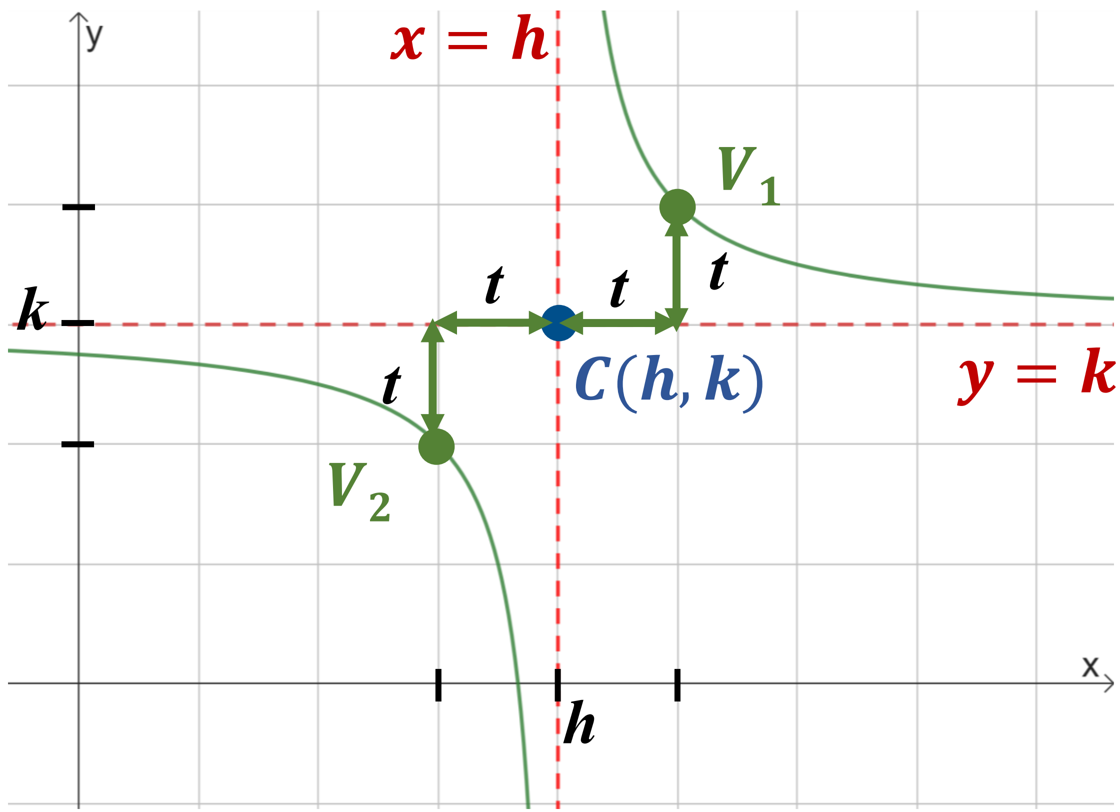
Centro: $\boldsymbol{C(h,k)}$

Asíntotas:

Rectas: $\boldsymbol{x=h}$ e $\boldsymbol{y=k}$

Vértices:

$$\boldsymbol{V_1(h+t,k+t)}$$
$$\boldsymbol{V_2(h-t,k-t)}$$



HIPÉRBOLA

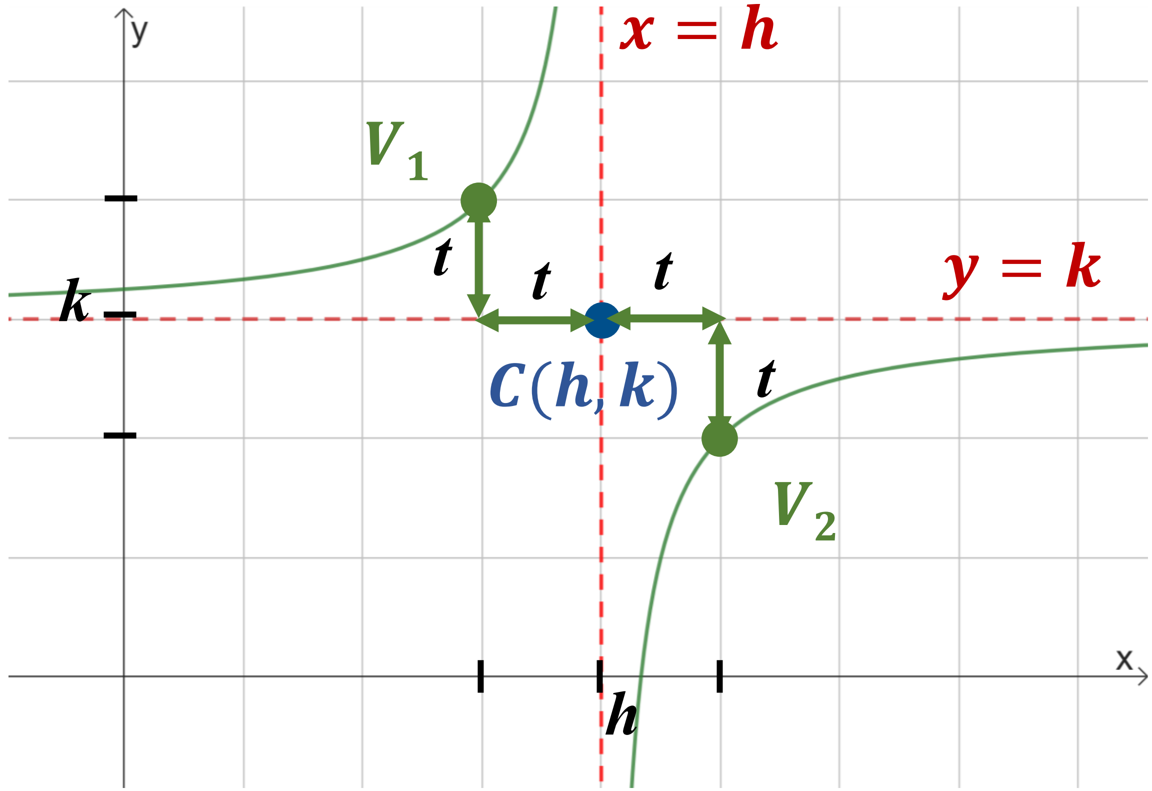
Elementos de una hipérbola con centro en $C(h,k)$

$$(x-h)(y-k)=-t^2$$

Centro y asíntotas no cambian

Vértices:

$$V_1(h-t, k+t)$$
$$V_2(h+t, k-t)$$



Veamos cómo queda la ecuación general de la hipérbola

Es decir que su ecuación general se puede escribir como:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

donde A, B, C, D, E y F son números reales.

Analicemos cuáles de los coeficientes son distintos de cero para cada una de las hipérbolas vistas

Entonces tenemos que …

Para una hipérbola con centro en $C(h, k)$:

Ecuación canónica → $(y-k)(x-h) = \pm\, t^2$

Operando algebraicamente queda:

¿Cuánto pueden valer A, B, C, D, E y F?

$$yx - hy - kx + kh \mp t^2 = 0$$

$$xy - kx - hy + \left(kh \mp t^2\right) = 0$$

$$\overset{B}{1}\,xy - \overset{D}{k}\,x - \overset{E}{h}\,y + \overbrace{\left(kh \mp t^2\right)}^{F} = 0$$

$$\boxed{\cancel{Ax^2} + Bxy + \cancel{Cy^2} + Dx + Ey + F = 0}$$

Es decir que …

$$\cancel{Ax^2} + Bxy + \cancel{Cy^2} + Dx + Ey + F = 0$$

Imagen de Peggy and Marco Lachmann-Anke en Pixabay

Si la ecuación corresponde a una HIPÉRBOLA, debe cumplir:

- ✓ $A = C = 0$

Ejemplos:

¿El punto $\mathrm{P}(2,3)$ pertenece a la hipérbola de ecuación $(x-1)y=3$?

Graficar la hipérbola de ecuación $xy=-4$

Determine la ecuación de una hipérbola con centro en $C(1,3)$. ¿Es única?

Imagen de 3dman_eu en Pixabay

Ejemplo:

Dada la siguiente hipérbola, identificar sus elementos y determinar su ecuación.

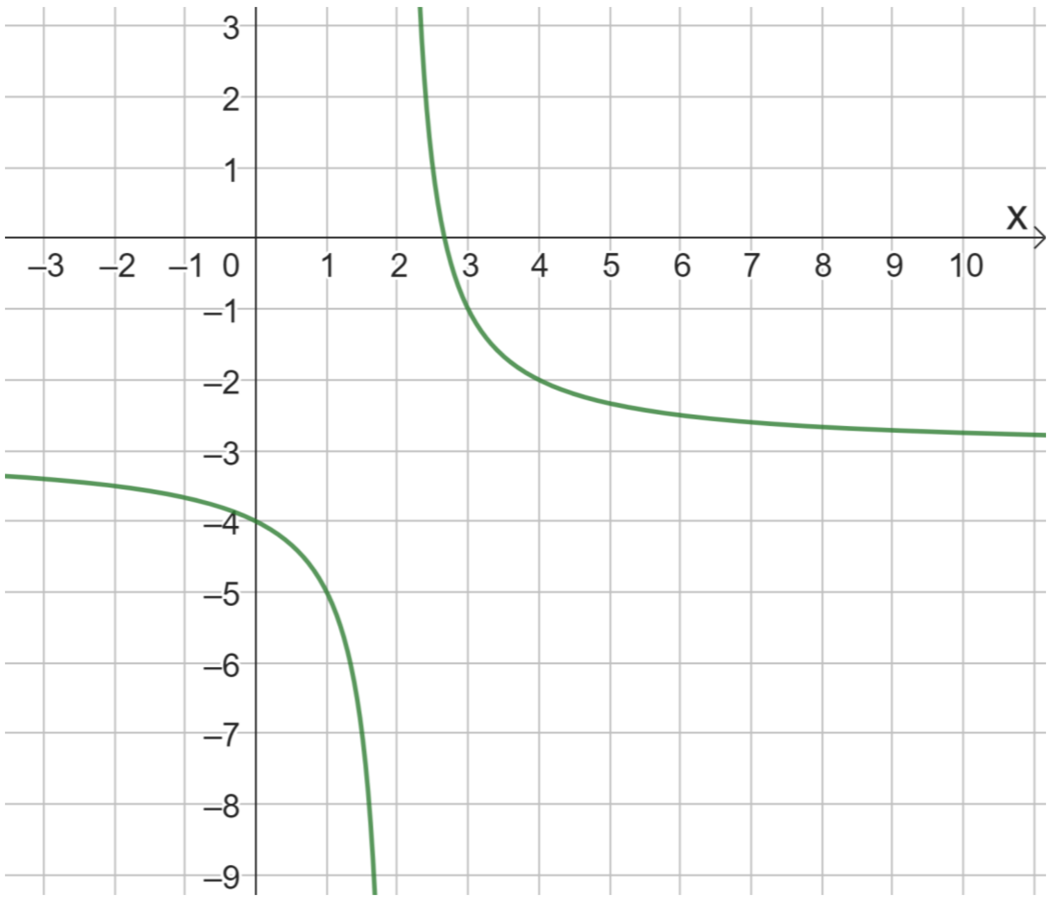


Imagen de 3dman_eu en Pixabay

Matemática

Clase 12 – Martes 13-6

Facultad de Ciencias Agrarias y Forestales
UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PLATA

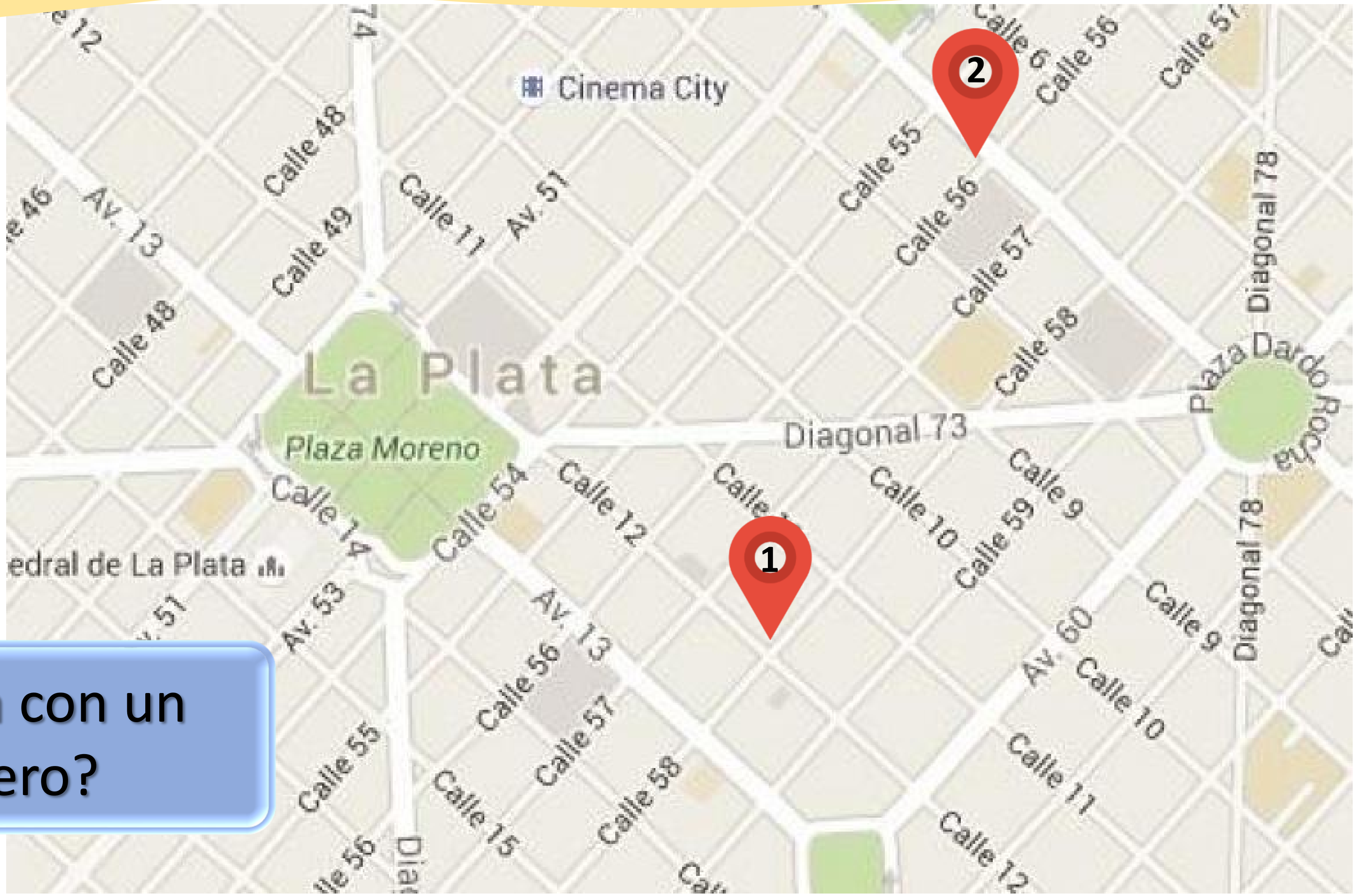
Cronograma

12-jun	Tema 8: Vectores	Trabajo Práctico N°6: Vectores
19-jun	**Feriado**	Trabajo Práctico N°6: Vectores
26-jun	Tema 8: Vectores	Trabajo Práctico N°6: Vectores

VECTORES

Supongamos que queremos desplazarnos desde **1** hasta **2,** ¿cómo podemos indicar ese desplazamiento?

Imagen de Peggy and Marco Lachmann-Anke en Pixabay



¿Alcanza con un número?

¡NO ALCANZA CON UN NÚMERO!

Imagen de Peggy and Marco Lachmann-Anke en Pixabay


Imagen de Peggy and Marco Lachmann-Anke en Pixabay

Entonces…

Existen ***magnitudes escalares***

Longitud, área, volumen, temperatura, tiempo…

Utilizamos un número (escalar)

Existen ***magnitudes vectoriales***

Desplazamiento, velocidad, aceleración fuerza…

Utilizamos **“vectores”**

¿Qué es un vector?

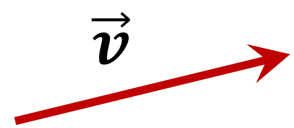
Un **vector** es una cantidad que tiene una ***magnitud*** (valor numérico), una ***dirección*** y un ***sentido***.

Un **vector** se representa con un segmento de recta con un sentido definido (segmento orientado).

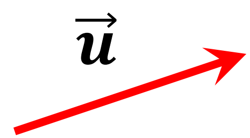
FLECHA

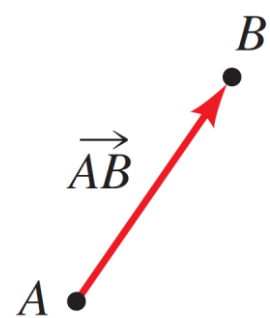
REPRESENTACIÓN DE VECTORES

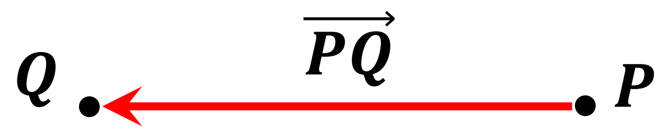
Un vector se representa gráficamente como una flecha.



Notación: Un vector ser escribe como: $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{AB}$







Dado por su longitud y orientación

Dados por el punto inicial (origen) y el punto final (extremo)

¿Cómo puedo caracterizar a vector?

Elementos de un vector:

- **Módulo:** longitud del vector (magnitud).
- **Dirección:** la inclinación del vector (se puede pensar como la pendiente de una recta sobre la que se apoya el vector).
- **Sentido:** para qué lado está orientada la flecha.

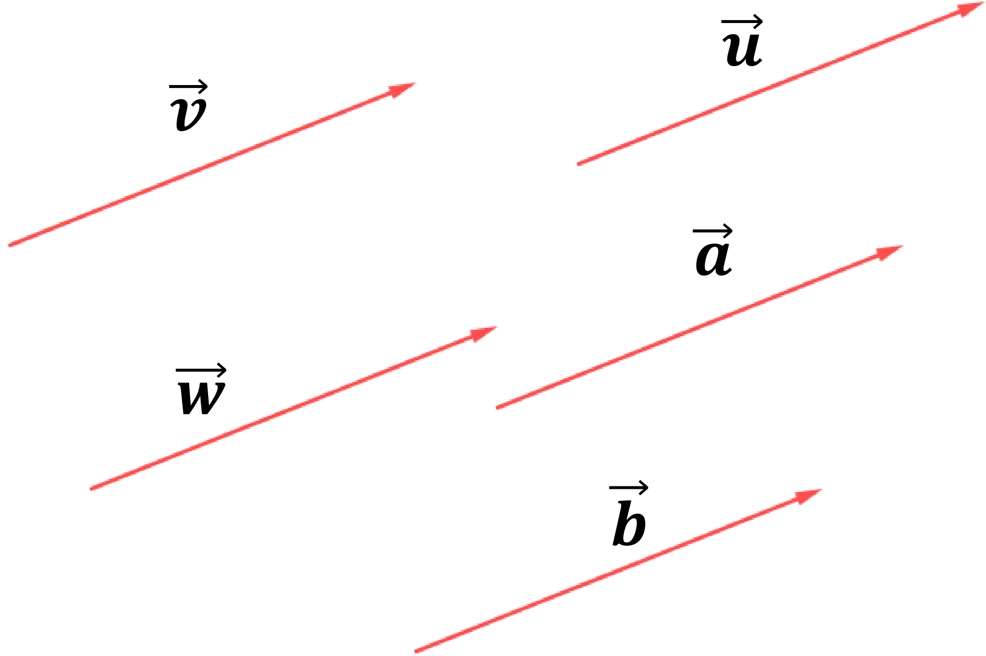
Definición de ***Igualdad entre Vectores***

Imagen de Peggy and Marco Lachmann-Anke en Pixabay

Dos vectores **son iguales** si tienen *igual módulo*, *igual dirección* e *igual sentido*.

Observemos …

Imagen de Peggy und Marco Lachmann-Anke en Pixabay



¿Entonces cualquiera de estas flechas es una representación gráfica del mismo vector?

$$\vec{u} = \vec{v} = \vec{w} = \vec{a} = \vec{b}$$

Imagen de Peggy and Marco Lachmann-Anke en Pixabay

Ejemplo:

Sea una partícula que se desplaza desde el punto A al punto B, entonces su ***vector desplazamiento*** es el $\vec{v}$ mostrado en la figura.

Sea otra partícula, que se desplaza desde el punto C al punto D y llamamos $\vec{u}$ a su vector desplazamiento.

El ***vector desplazamiento*** de ambas partículas es el mismo, más allá que tengan puntos de inicio y de fin diferentes.

Tienen ***igual módulo***, ***igual dirección*** ***igual sentido***

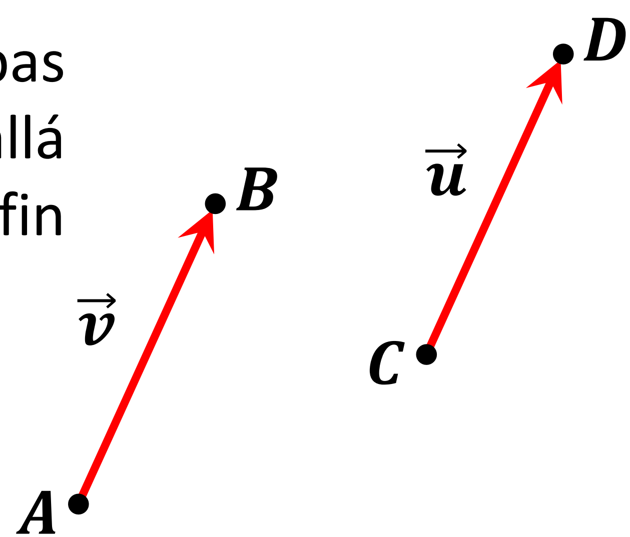


Imagen de 3dman_eu en Pixabay

Más definiciones …

Se define *vector nulo* al vector cuyo **módulo es igual a cero**.

El *vector nulo* es el único vector **sin dirección específica**.

Se define *vector unitario* a un vector cuyo **módulo es igual a UNO**.

Imagen de Peggy und Marco Lachmann-Anke en Pixabay

SUMA DE VECTORES

PRODUCTO DE UN ESCALAR POR UN VECTOR

Vamos a ver a dos operaciones entre vectores…

SUMA DE VECTORES

Si un cuerpo se mueve de $\boldsymbol{A}$ a $\boldsymbol{B}$ → **Su desplazamiento es $\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}$**

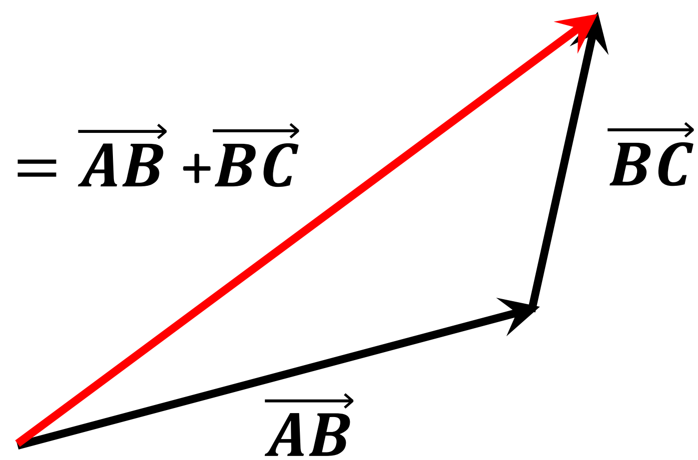
Si luego se mueve de $\boldsymbol{B}$ a $\boldsymbol{C}$ → **Su nuevo desplazamiento es $\overrightarrow{\boldsymbol{BC}}$**

En total el cuerpo se movió desde $\boldsymbol{A}$ hasta $\boldsymbol{C}$:

→ **El desplazamiento total es $\overrightarrow{\boldsymbol{AC}}$**

Gráficamente …

$$\overrightarrow{\boldsymbol{AC}} = \overrightarrow{\boldsymbol{AB}} + \overrightarrow{\boldsymbol{BC}}$$



Suma de vectores

SUMA DE VECTORES

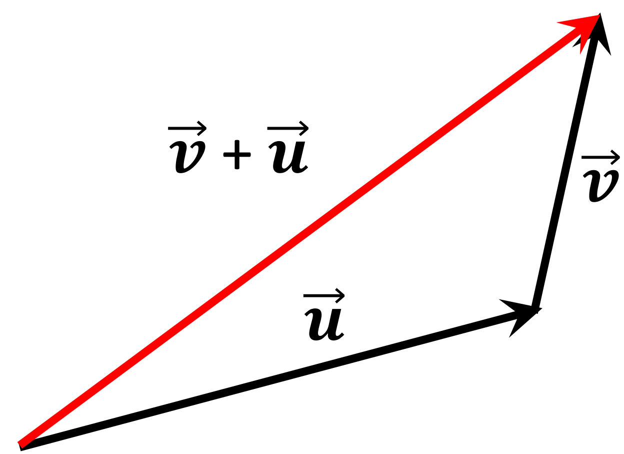
Veamos la definición de **suma vectorial**

Hay dos maneras de pensarlo gráficamente …

Si $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son vectores colocados de tal forma que el origen de $\vec{v}$ toque el extremo de $\vec{u}$.

La suma $\vec{u} + \vec{v}$ es un nuevo vector con origen en el origen de $\vec{u}$ y extremo en el extremo de $\vec{v}$.

Como desplazamiento



SUMA DE VECTORES

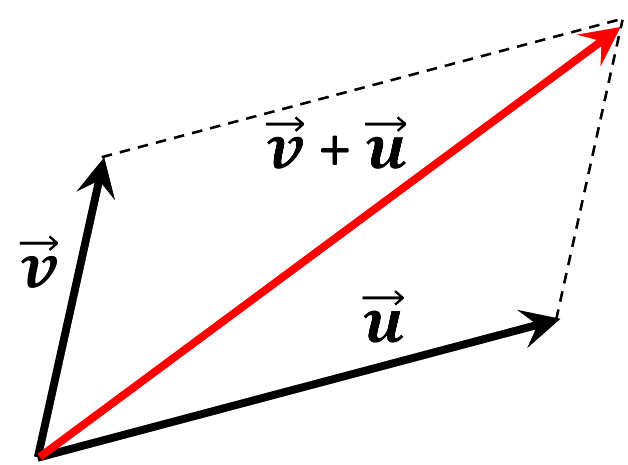
Veamos la definición de **suma vectorial**

Con la regla del paralelogramo

Si $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son dos vectores colocados con el origen de ambos en el mismo punto.

Se dibuja un paralelogramo repitiendo los vectores en los extremos de $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

La suma $\vec{u}+\vec{v}$ es el vector con origen en el origen de $\vec{u}$ y $\vec{v}$ y extremo en el vértice opuesto del paralelogramo.



Ejemplo: Graficar la suma de los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$:

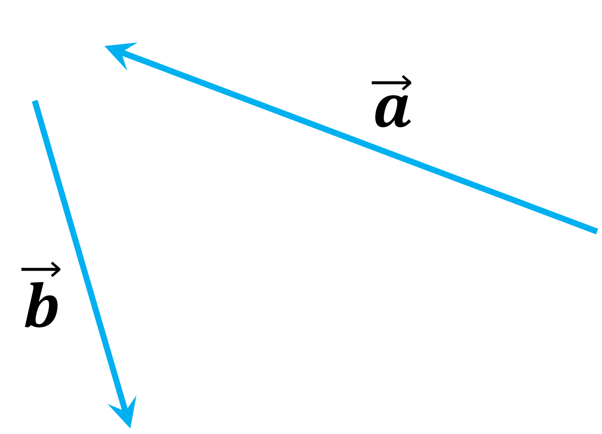
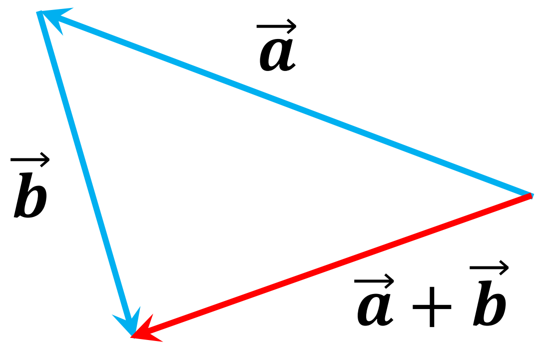
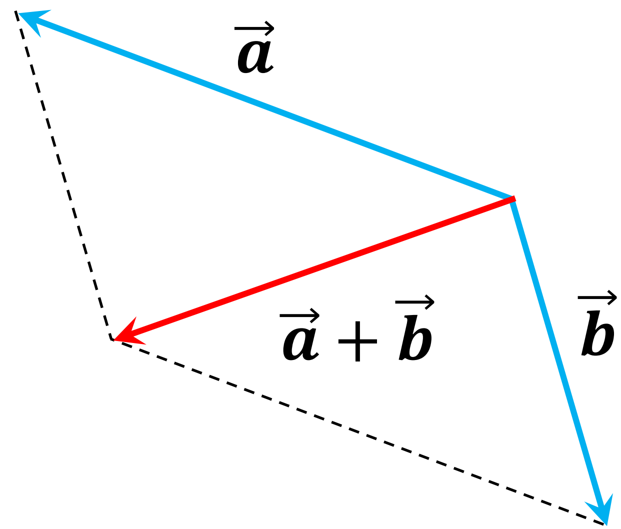
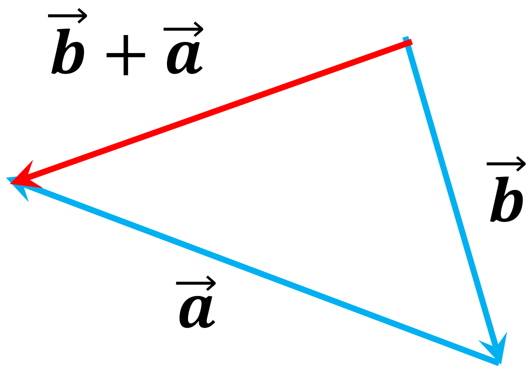


Imagen de 3dman_eu en Pixabay







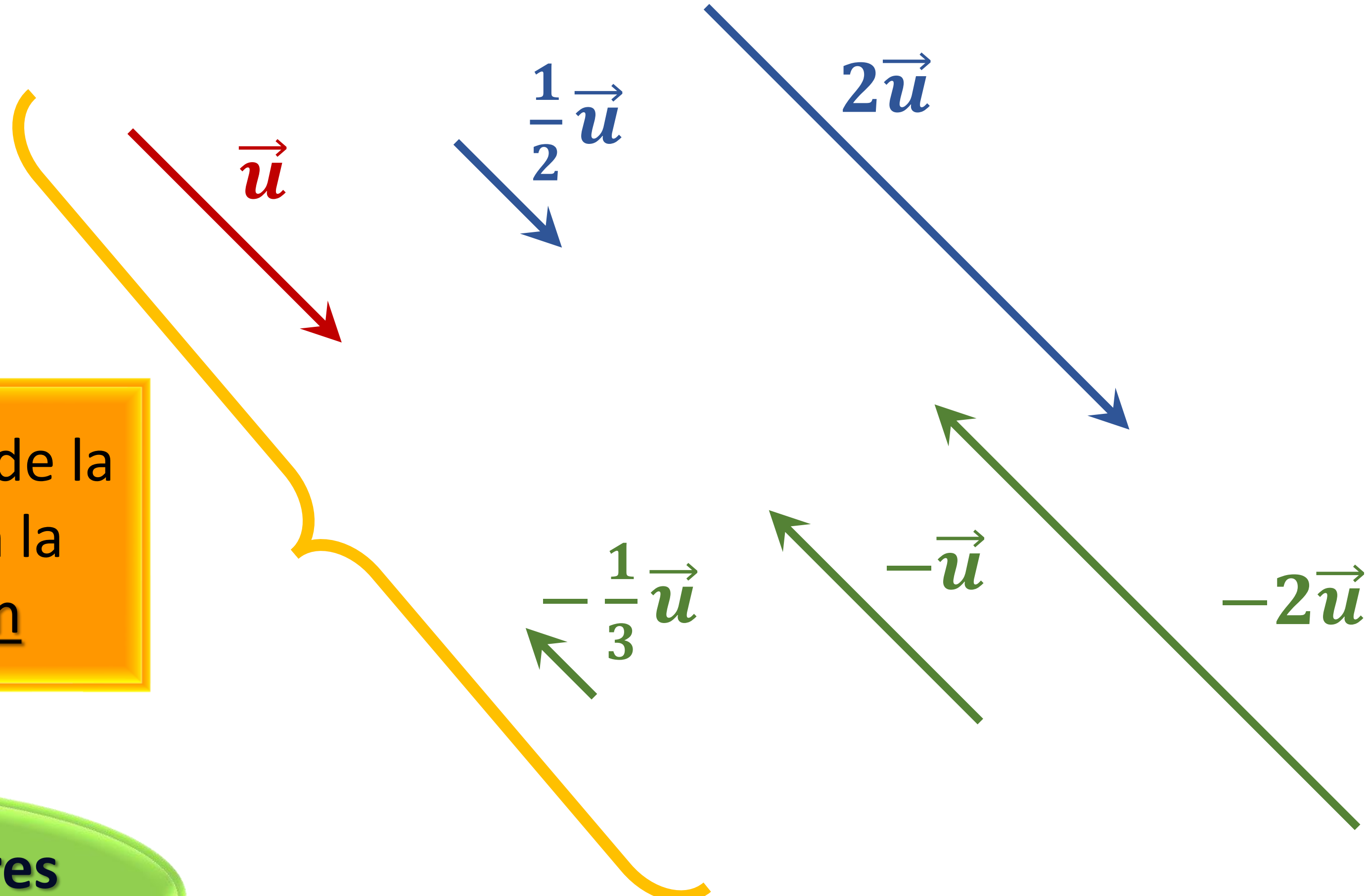
Producto de un vector por un *escalar*

Si c es un escalar (un número real) y $\vec{\boldsymbol{u}}$ un vector, entonces el producto $c\vec{\boldsymbol{u}}$ es un **nuevo vector que** cumple:

- Su módulo es |c| multiplicado por el módulo de $\vec{\boldsymbol{u}}$.
- Su dirección es igual a la dirección de $\vec{\boldsymbol{u}}$.
- Su sentido es: Igual al sentido de $\vec{\boldsymbol{u}}$ si c es positivo.
  Opuesto al sentido de de $\vec{\boldsymbol{u}}$ si c es negativo.
- Si $\mathbf{c} = \mathbf{0}$ o $\vec{\boldsymbol{u}} = \vec{\mathbf{0}}$ entonces el producto $c\vec{\boldsymbol{u}} = \vec{\mathbf{0}}$ es el vector nulo.

Producto de un vector por un *escalar*

Gráficamente …



Todos los vectores de la forma $c\vec{u}$ tienen la <u>misma dirección</u>

Se llaman **vectores colineales**

Esta foto de Autor desconocido está bajo licencia CC BY-NC-ND

Entonces … ¿Cómo podríamos hacer la **resta** $\vec{\boldsymbol{u}} - \vec{\boldsymbol{v}}$?

¡¡¡Pensarlo como $\vec{\boldsymbol{u}} + (-\vec{\boldsymbol{v}})$!!!

¡¡Vamos a verlo!!

Imagen de Peggy and Marco Lachmann-Anke en Pixabay

RESTA DE VECTORES

¿Cómo podríamos hacer una **resta entre vectores**?

Dados los vectores $\vec{\boldsymbol{u}}$ y $\vec{\boldsymbol{v}}$ podemos hacer la resta vectorial como:

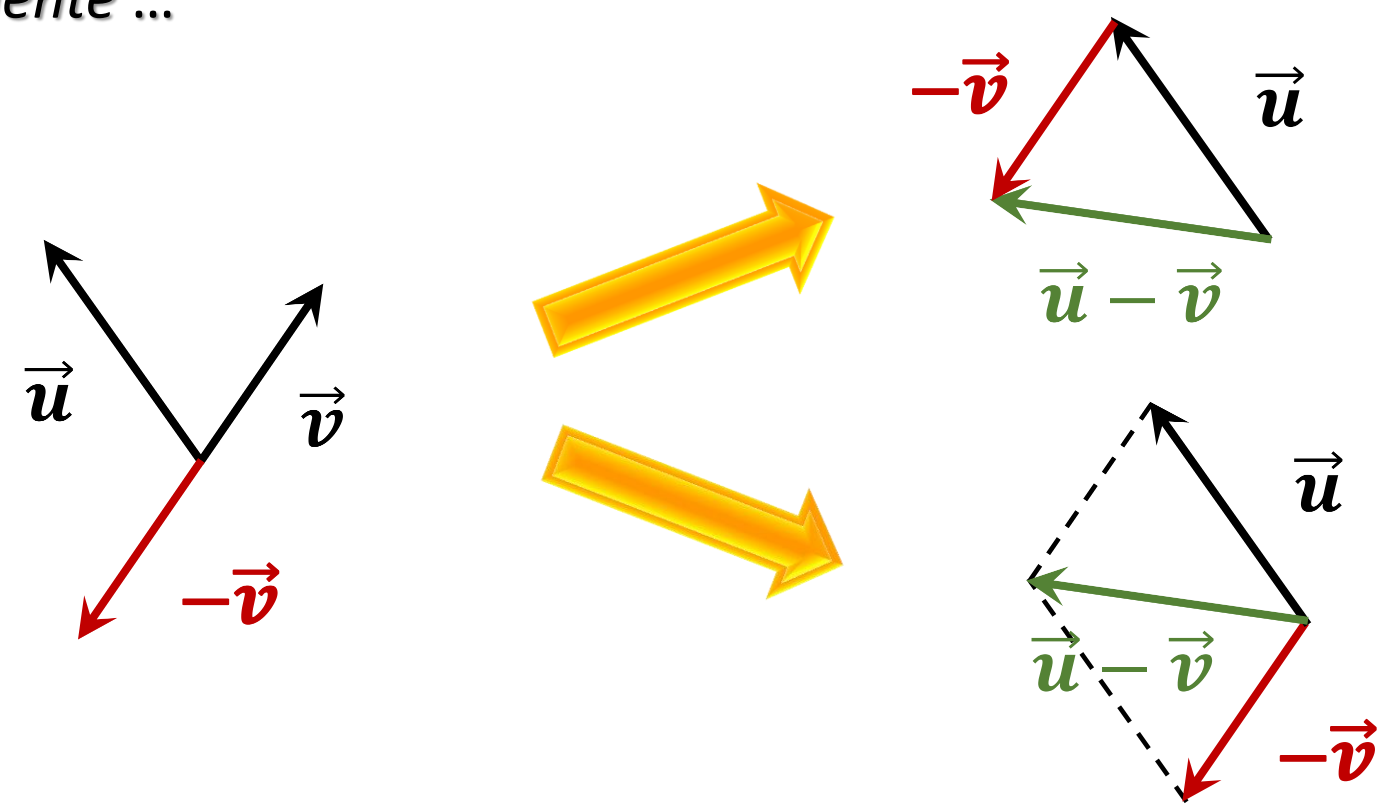
$$\vec{\boldsymbol{u}} - \vec{\boldsymbol{v}} = \vec{\boldsymbol{u}} + (-\vec{\boldsymbol{v}})$$

Es decir, reflejamos $\vec{\boldsymbol{v}}$ y luego sumamos $\vec{\boldsymbol{u}}$ y el reflejado de $\vec{\boldsymbol{v}}$

RESTA DE VECTORES

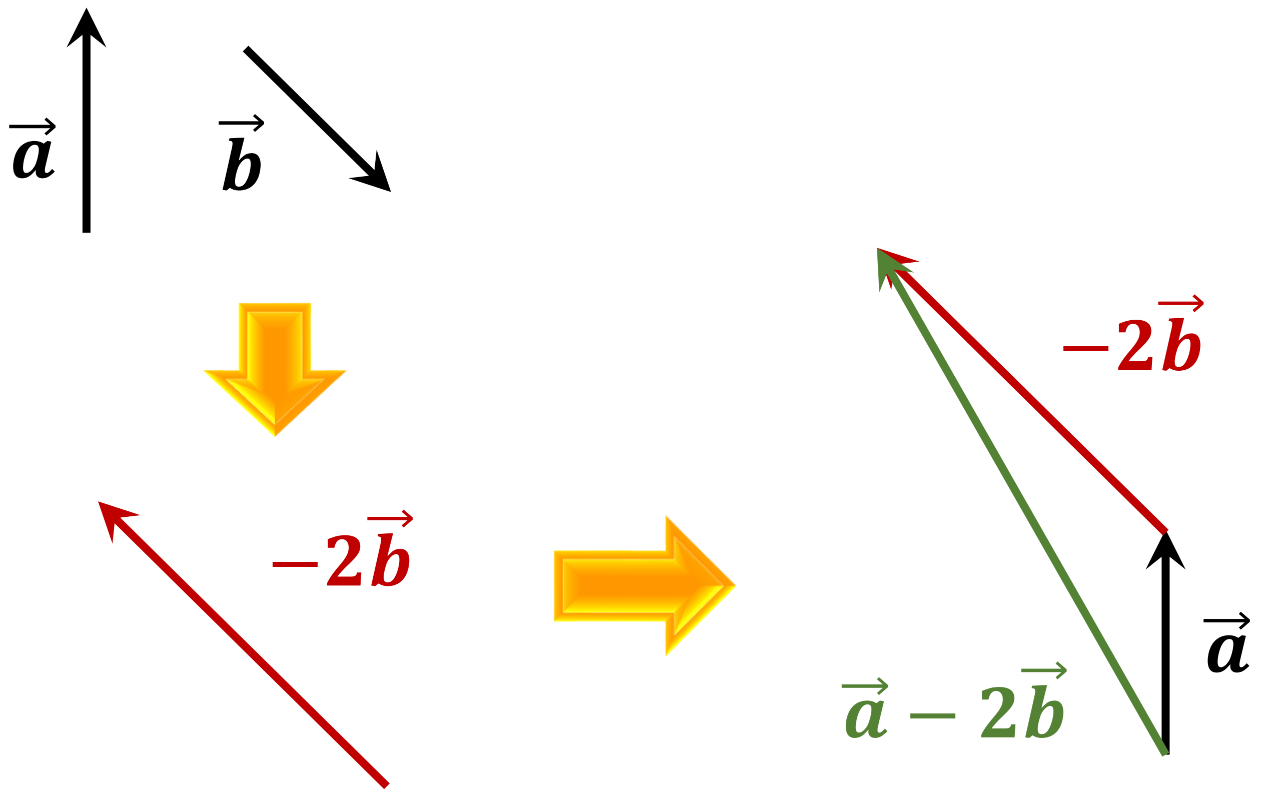
$$\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$$

Gráficamente …



Ejemplo: Si $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son los vectores mostrados en la figura, resolver gráficamente la siguiente operación entre vectores: $\vec{a} - 2\vec{b}$.

Imagen de 3dman_eu en Pixabay



VECTORES EN UN SISTEMA DE COORDENADAS

Para ciertos propósitos es útil graficar los vectores dentro de un sistema de coordenadas.

$\mathcal{R}^2$ $\mathcal{R}^3$

- Para graficar el vector $\vec{u}$ (en R^2 o R^3) es necesario ubicarlo en algún punto de origen.
- Como es indistinto en qué punto se ubica el vector, es usual ubicar su origen en el origen de coordenadas.

Imagen de Peggy und Marco Lachmann-Anke en Pixabay

VECTORES EN EL PLANO

Al colocar un vector en el plano, es posible describirlo de manera analítica

A PARTIR DE SUS COMPONENTES

A PARTIR DEL MÓDULO Y DE UN ÁNGULO

Componentes

Módulo y ángulo

Vamos a ver primero cómo representar vectores en el plano

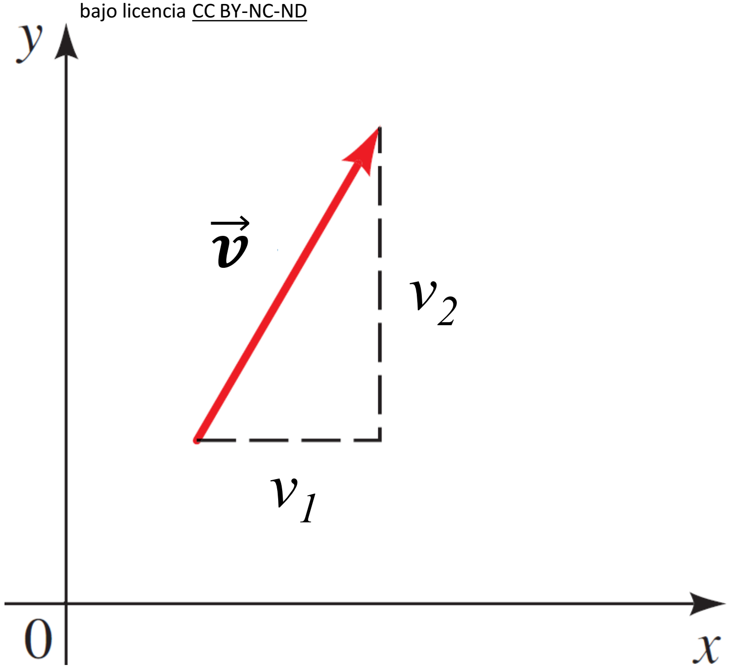
¡Veamos primero cómo representar analíticamente a los vectores a partir de sus **COMPONENTES**!

Imagen de Peggy and Marco Lachmann-Anke en Pixabay

¿Qué son las **componentes** de un vector?

$\vec{v}$ expresado con sus componentes en $\mathcal{R}^2$

$$\boxed{\vec{v} = \langle v_1, v_2 \rangle}$$



v_1: componente horizontal de $\vec{v}$

- Es la variación del vector $\vec{v}$ en la *dirección del eje x*.

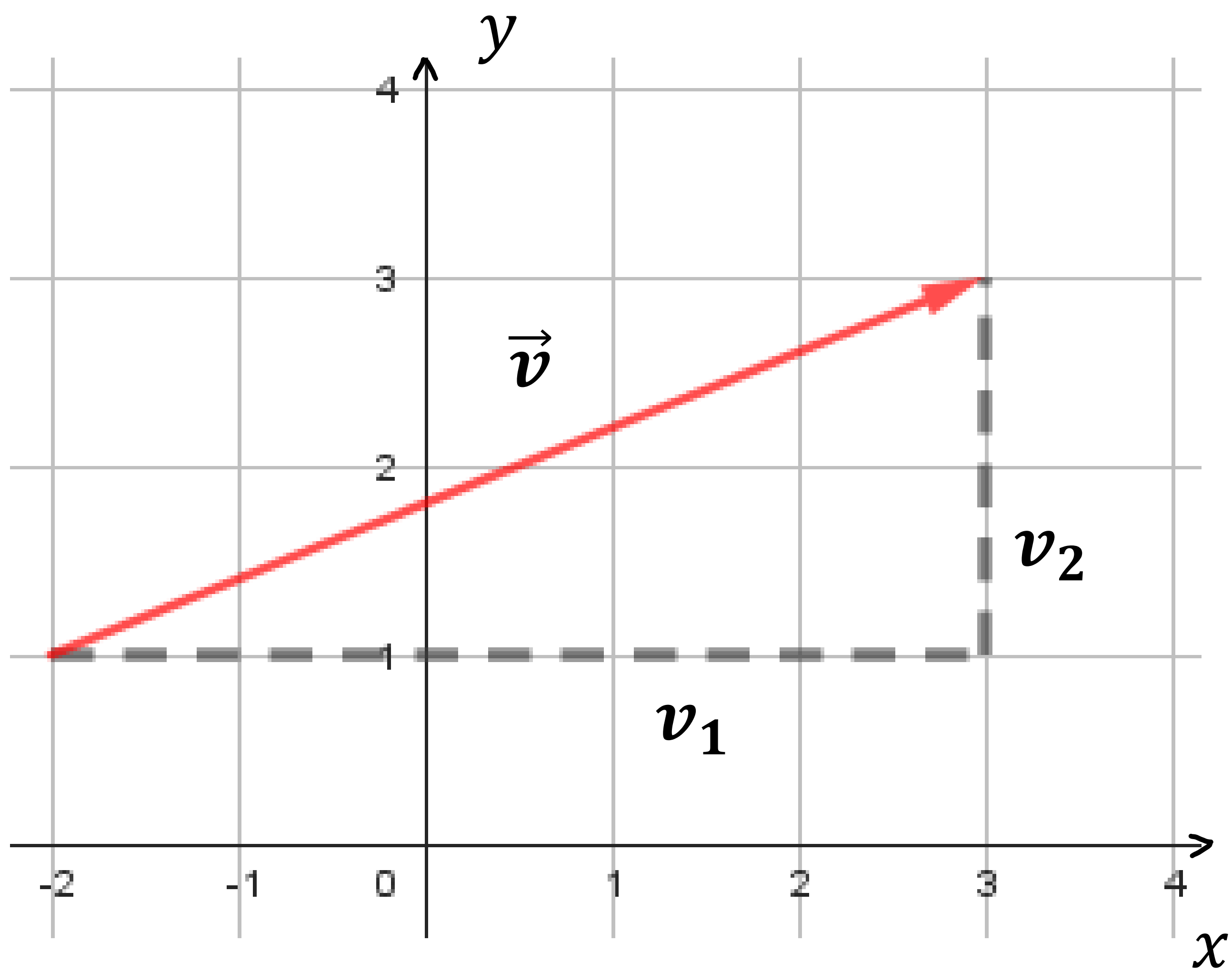
v_2: es la componente vertical de $\vec{v}$

- Es la variación del vector $\vec{v}$ en la *dirección del eje y*.

Ejemplo:

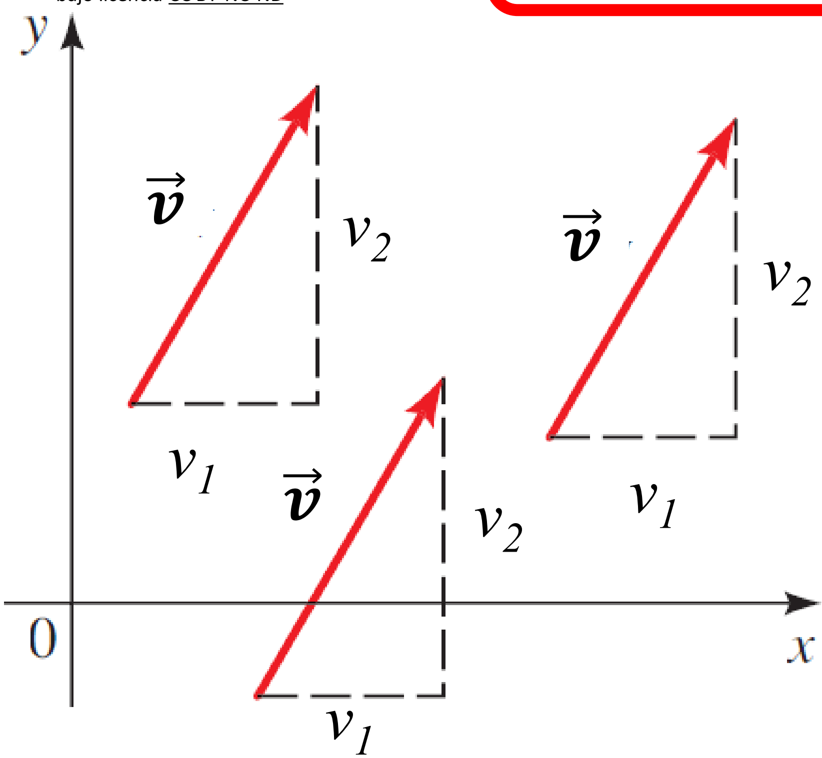
Calcular las componentes del vector $\vec{v}$ de la figura:

Imagen de 3dman_eu en Pixabay



¿Cómo son las **componentes** de las distintas representaciones de un vector?

$$\boxed{\vec{v} = \langle v_1, v_2 \rangle}$$



Distintas representaciones de mismo vector $\vec{v}$ tienen iguales componentes

Sin importar el punto origen y el punto extremo

Repensemos la definición de ***Igualdad entre Vectores***

Antes dijimos que …

Dos vectores **son iguales** si tienen *igual módulo*, *igual dirección* e *igual sentido*.

Pero entonces también es cierto que …

Dosvectores **son iguales** si tienen *iguales COMPONENTES*.

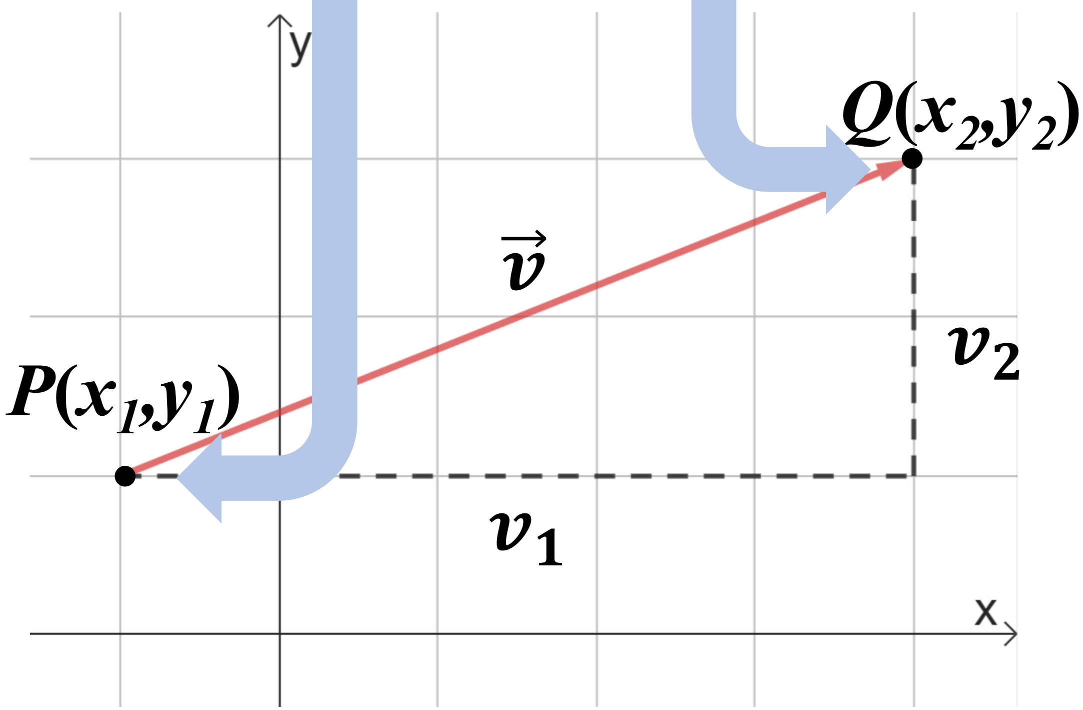
*Veamos cómo calcular las **componentes** de un vector a partir de sus puntos de origen y extremo*

$$\vec{v} = \langle v_1, v_2 \rangle$$

Las componentes del vector $\vec{v}$ se pueden calcular a partir de las coordenadas de los puntos:

$$\begin{cases} v_1 = x_2 - x_1 \\ v_2 = y_2 - y_1 \end{cases}$$

Conocemos el origen y el extremo



Ejemplos:

1) Graficar el vector $\vec{\boldsymbol{v}} = \langle \mathbf{3}, -\mathbf{2} \rangle$.

2) Encontrar las componentes de un vector con punto de origen en $\mathrm{A}(-3,1)$ y extremo en $\mathrm{B}(4,4)$. Graficar el vector.
Si el extremo es punto $\mathrm{C}(-1,2)$, ¿cuál es el punto de origen del vector?

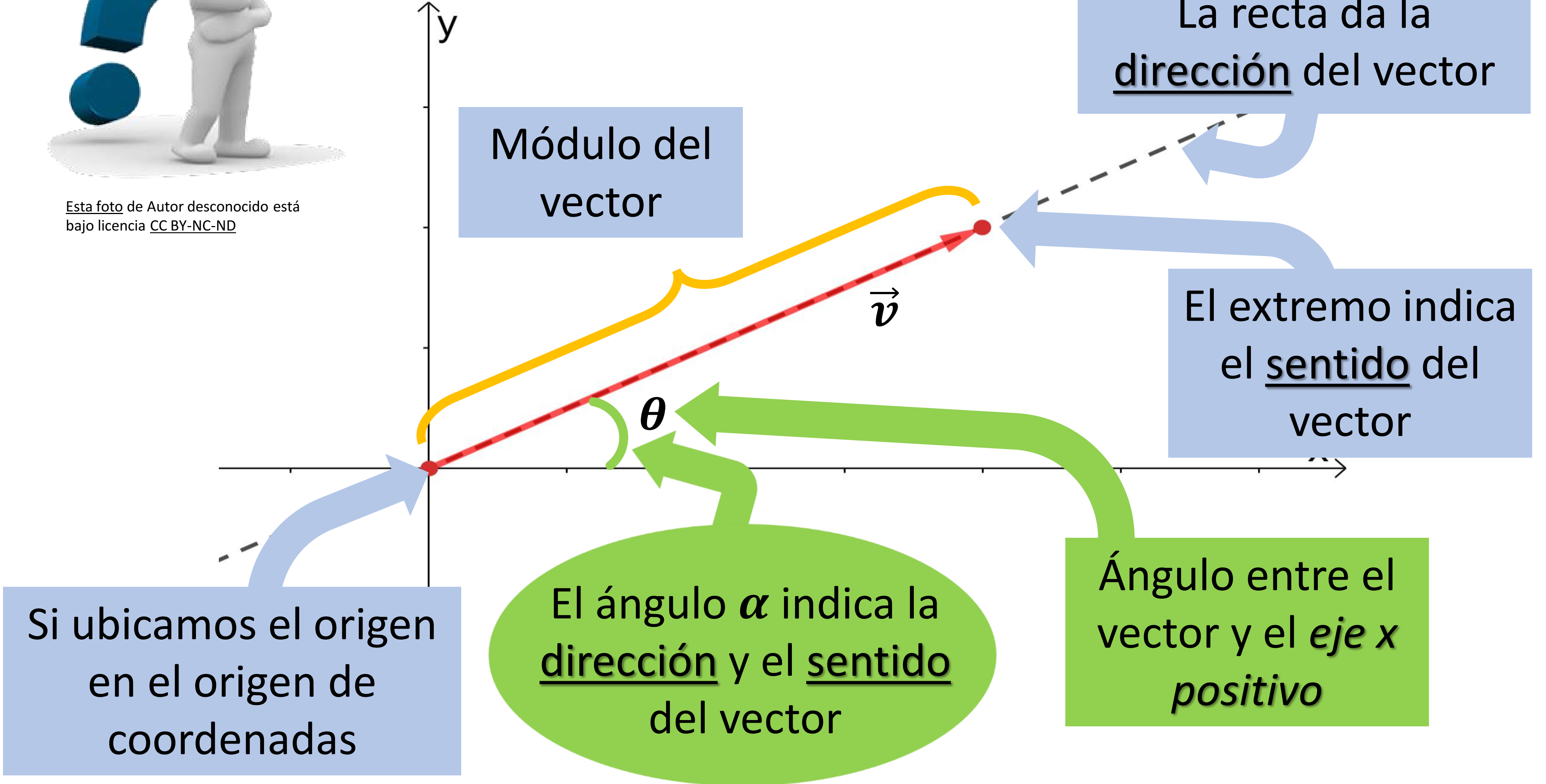
3) Dados los vectores $\vec{\boldsymbol{v}} = \langle \mathbf{3}, -\mathbf{2} \rangle$ y $\vec{\boldsymbol{u}} = \langle \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a} + \mathbf{2}\boldsymbol{b} \rangle$ determinar los valores de $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ para que los vectores $\vec{\boldsymbol{v}}$ y $\vec{\boldsymbol{u}}$ sean iguales.

Imagen de 3dman_eu en Pixabay

¡Vamos a ver ahora cómo representar analíticamente a los vectores mediante el **MÓDULO y un ÁNGULO**!

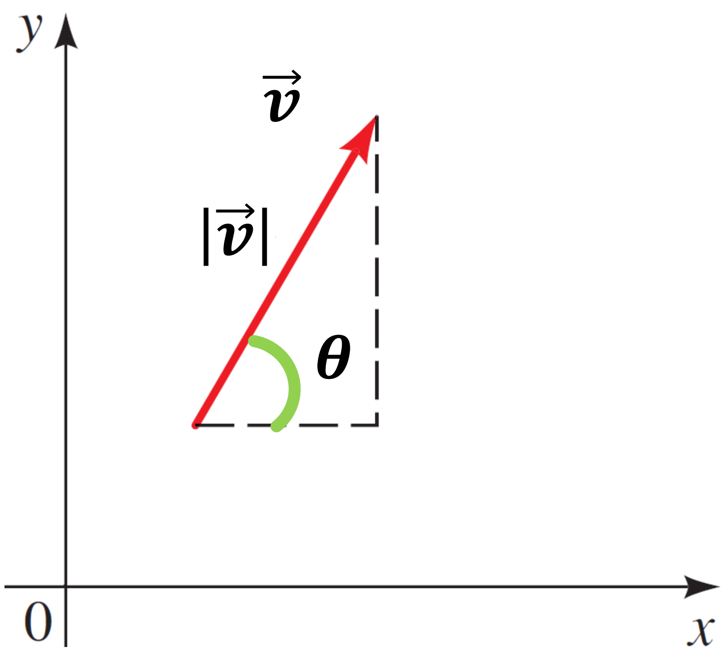
Imagen de Peggy and Marco Lachmann-Anke en Pixabay

¿Qué ángulo podemos utilizar para indicar dirección y sentido?



Representación de vectores mediante el módulo y un ángulo

Si conocemos el módulo y el ángulo con el *eje x positivo* $\Longrightarrow$ Podemos graficar el vector



Cómo definimos el ángulo:

- Si θ es positivo: sentido antihorario de giro.
- Si θ es negativo: sentido horario de giro.

VECTORES EN EL PLANO

A PARTIR DE SUS COMPONENTES

A PARTIR DEL MÓDULO Y DE UN ÁNGULO

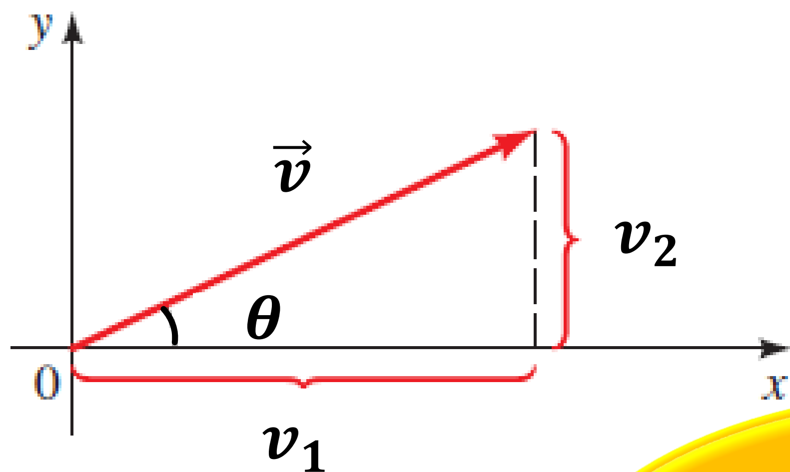
VECTORES EN EL PLANO

¡Pitágoras!

Dadas las componentes de $\vec{v}$

Buscamos el módulo y el ángulo $\boldsymbol{\theta}$


Imagen de 3dman_eu en Pixabay



$$\vec{v} = \langle v_1, v_2 \rangle$$

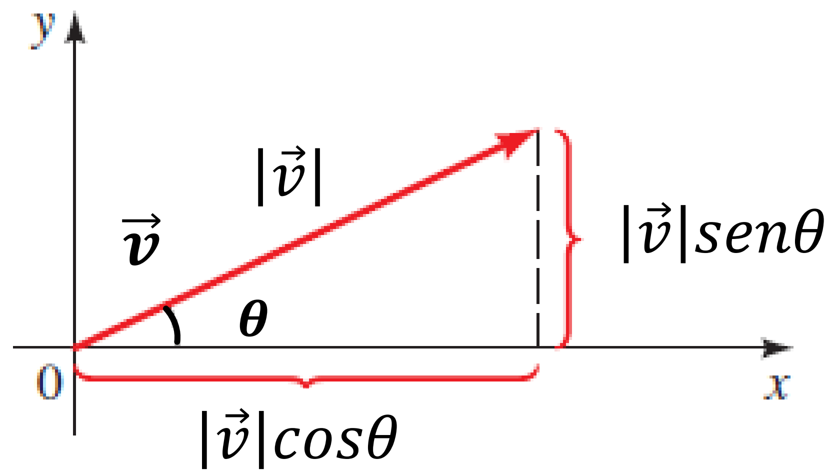
$$|\vec{v}| = \sqrt{(v_1)^2 + (v_2)^2}$$

$$\theta = arctg\left(\frac{v_2}{v_1}\right)$$

VECTORES EN EL PLANO

Dados el módulo y el ángulo $\boldsymbol{\alpha}$

Buscamos las componentes de $\vec{\boldsymbol{v}}$



$$\begin{cases} \boldsymbol{v_1 = |\vec{v}|cos\theta} \\ \boldsymbol{v_2 = |\vec{v}|sen\theta} \end{cases}$$

$$\boldsymbol{|\vec{v}| \ ; \theta}$$

Imagen de 3dman_eu en Pixabay

Ejemplos:

1) Encontrar el módulo y dar la dirección y sentido mediante un ángulo adecuado del vector $\vec{v} = \langle -1, 4 \rangle$

2) Encontrar las componentes del vector $\vec{u}$, que tiene módulo igual a 10 y forma un ángulo con el eje x positivo igual a 120°.

3) Determinar el módulo del vector $\vec{w} = \langle 1, -2 \rangle$. ¿Es unitario?

Imagen de 3dman_eu en Pixabay

Imagen de Peggy und Marco Lachmann-Anke en Pixabay

Volvemos a las operaciones entre vectores…

SUMA DE VECTORES

PRODUCTO DE UN ESCALAR POR UN VECTOR

CÁLCULO ANALÍTICO

SUMA DE VECTORES EN EL PLANO

Veamos cómo calcular la **suma de vectores** analíticamente

Si $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son vectores con componentes:

$$\vec{v} = \langle v_1, v_2 \rangle \text{ y } \vec{u} = \langle u_1, u_2 \rangle$$

El **vector suma** es un nuevo vector, con componentes:

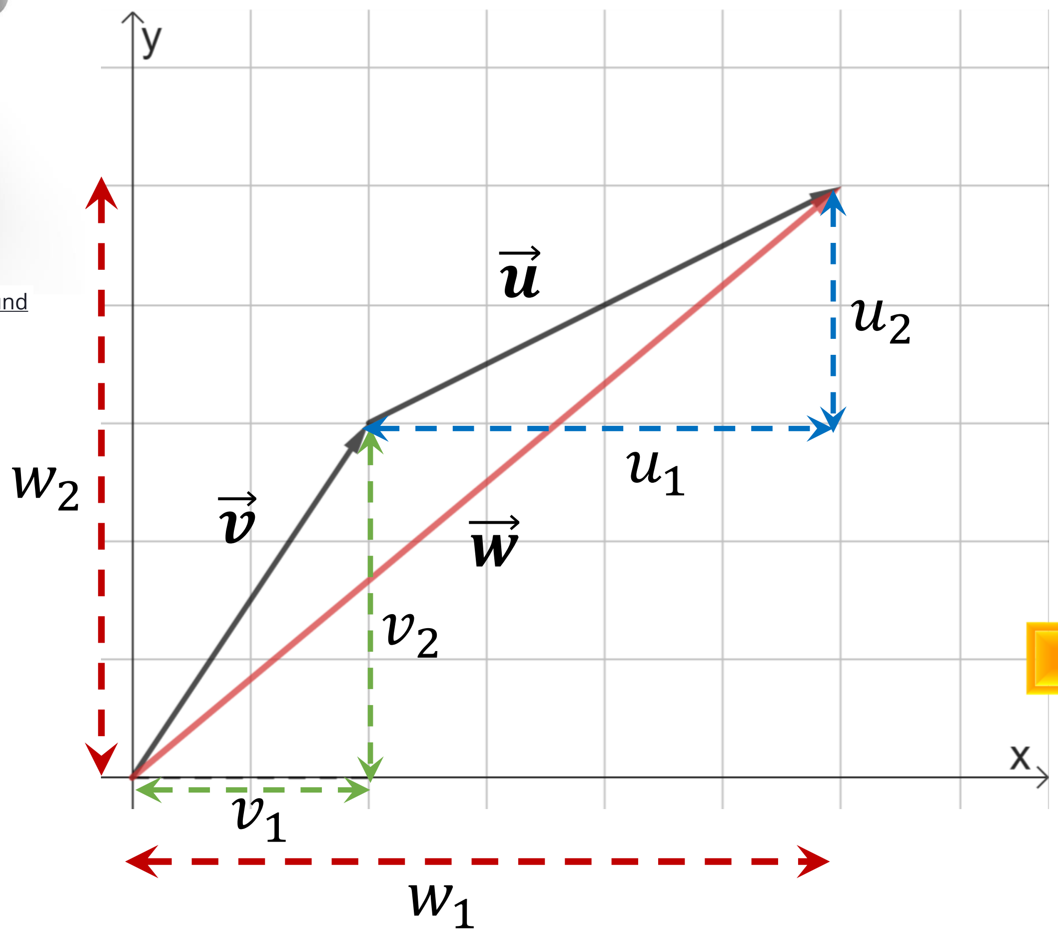
$$\vec{v} + \vec{u} = \langle v_1 + u_1, v_2 + u_2 \rangle$$

SUMA DE VECTORES EN EL PLANO

Imagen de Peggy und Marco Lachmann-Anke en Pixabay

Miremos fuerte …

$$\vec{w} = \vec{v} + \vec{u}$$



$$\vec{v} = \langle v_1, v_2 \rangle$$
$$\vec{u} = \langle u_1, u_2 \rangle$$
$$\vec{w} = \langle w_1, w_2 \rangle$$

Vemos que efectivamente:

$$\begin{cases} w_1 = v_1 + u_1 \\ w_2 = v_2 + u_2 \end{cases}$$

PRODUCTO DE UN VECTOR POR UN *ESCALAR*

Veamos cómo calcular el **producto por un escalar** analíticamente

Si $\boldsymbol{t}$ en un número real cualquiera (escalar) y $\vec{\boldsymbol{v}}$ es un vector con componentes:

$$\vec{\boldsymbol{v}} = \langle \boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2} \rangle$$

El **producto de** $\vec{\boldsymbol{v}}$ **por** $\boldsymbol{t}$ es un nuevo vector, con componentes:

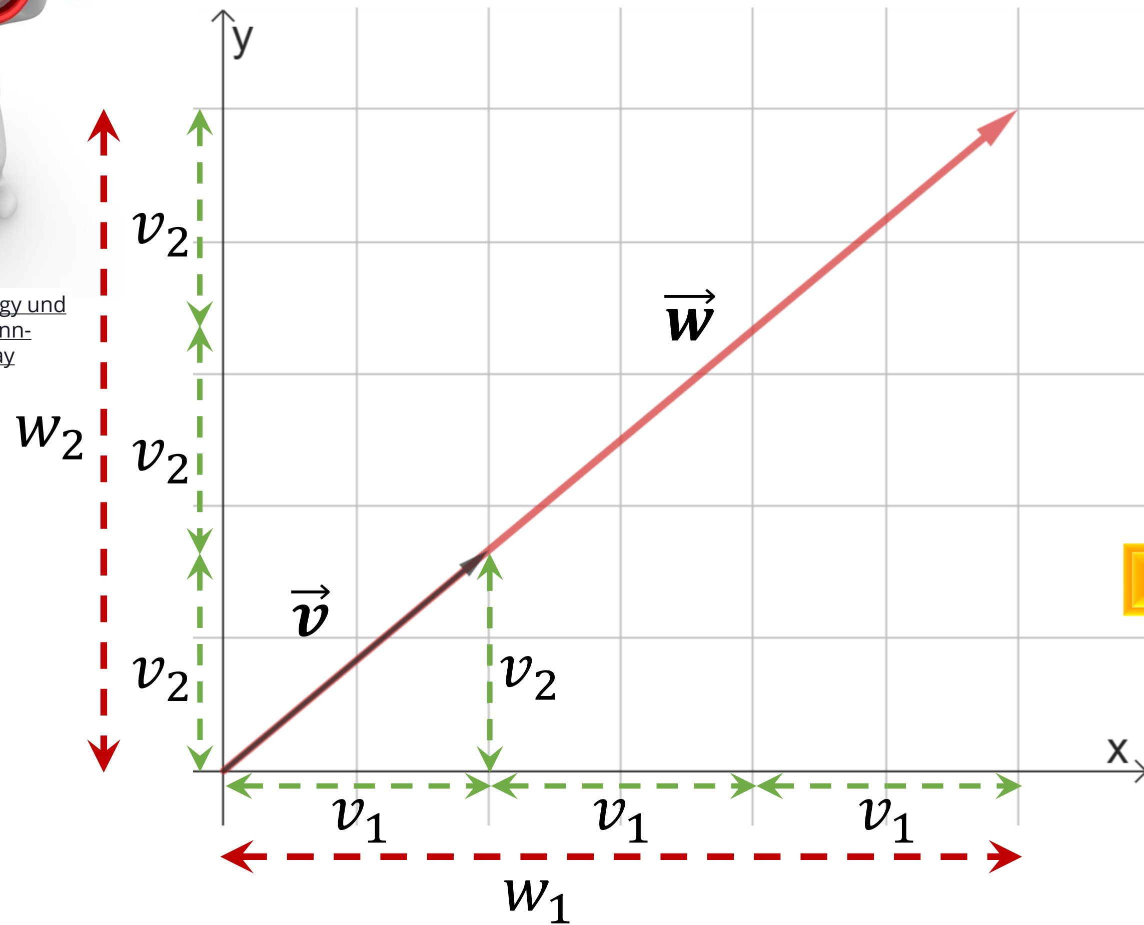
$$\mathrm{t}\vec{\boldsymbol{v}} = \langle \boldsymbol{t v_1}, \boldsymbol{t v_2} \rangle$$

PRODUCTO DE UN VECTOR POR UN *ESCALAR*

Imagen de Peggy und Marco Lachmann-Anke en Pixabay

Miremos fuerte …

$$\vec{w} = t\vec{v}$$



$$\vec{v} = \langle v_1, v_2 \rangle$$

$$\vec{w} = \langle w_1, w_2 \rangle$$

Vemos que efectivamente:

$$\begin{cases} w_1 = tv_1 \\ w_2 = tv_2 \end{cases}$$

PRODUCTO DE UN VECTOR POR UN *ESCALAR*

Veamos cómo calcular el **producto por un escalar** analíticamente

¿Qué pasará con $\boldsymbol{\theta}$? ¿Cambia?

Si **t** es un número real cualquiera (escalar) y $\vec{\boldsymbol{v}}$ es un vector con módulo $|\vec{\boldsymbol{v}}|$ y ángulo $\boldsymbol{\theta}$,

El **producto de $\vec{\boldsymbol{v}}$ por t** es un nuevo vector con módulo:

$$|\mathrm{t}\vec{\boldsymbol{v}}| = |t||\vec{\boldsymbol{v}}|$$

PROPIEDADES

Suma de vectores:

1. $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$
2. $\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}$
3. $\vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$
4. $\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$

Longitud de un vector:

6. $|c\,\vec{u}| = |c|\,|\vec{u}|$

Multiplicación por un escalar:

1. $c\,(\vec{u} + \vec{v}) = c\,\vec{u} + c\,\vec{v}$
2. $(c + d)\,\vec{u} = c\,\vec{u} + d\,\vec{u}$
3. $(c\,d)\vec{u} = c\,(d\,\vec{u}) = d\,(c\,\vec{u})$
4. $1\,\vec{u} = \vec{u}$
5. $0\,\vec{u} = \vec{0}$
6. $c\,\vec{0} = \vec{0}$

Ejemplos:

1) Determinar el valor de k de manera que los vectores $\vec{\boldsymbol{v}} = \langle \mathbf{3}, -\mathbf{2} \rangle$ y $\vec{\boldsymbol{u}} = \langle \boldsymbol{k}, \mathbf{5} \rangle$ sean colineales.

2) ¿Los vectores $\vec{\boldsymbol{w}} = \langle \mathbf{4}, \mathbf{3} \rangle$ y $\vec{\boldsymbol{s}} = \left\langle -\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}, \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}} \right\rangle$ son colineales?

Imagen de 3dman_eu en Pixabay

Más temprano definimos **vector unitario** como:

Se define *vector unitario* a un vector cuyo **módulo es igual a UNO**.

Se llama unitario del vector $\vec{v}$ a un nuevo vector con **igual dirección y sentido** que $\vec{v}$ y **módulo igual a uno**.

¿Cómo podemos encontrar el vector unitario de un vector conocido?

Ejemplo:

3) Encontrar el vector unitario del vector $\vec{\boldsymbol{r}} = \langle \mathbf{3}, -\mathbf{2} \rangle$.

Imagen de 3dman_eu en Pixabay

Definición de ***versores fundamentales***

Los *versores fundamentales* de $\mathcal{R}^2$ son los vectores $\vec{\imath}$ y $\vec{\jmath}$

El vector $\vec{\imath}$ tiene:

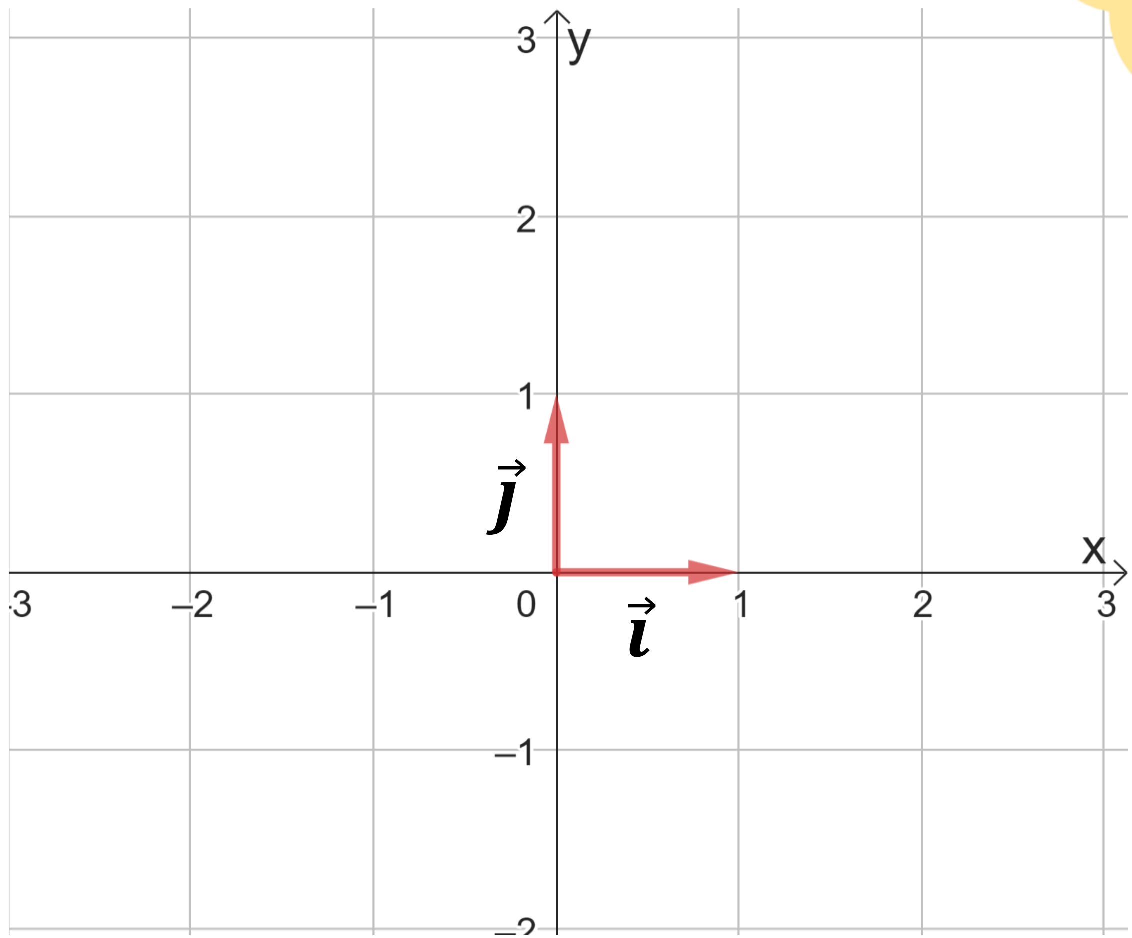
- *Módulo* igual a 1
- *Dirección* y *sentido del eje x positivo*.

El vector $\vec{\jmath}$ tiene:

- *Módulo* igual a 1
- *Dirección* y *sentido del eje y positivo*.

Imagen de Peggy und Marco Lachmann-Anke en Pixabay

Observemos …



$\vec{i} = \langle 1, 0 \rangle$

$\vec{j} = \langle 0, 1 \rangle$

¿Cuáles son las componentes de $\vec{i}$ y $\vec{j}$?

DESCOMPOSICIÓN CANÓNICA DE VECTORES

Todo vector $\vec{\boldsymbol{v}} =< \boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2} >$ en el plano se puede escribir utilizando los *versores fundamentales* como:

$$\vec{\boldsymbol{v}} = v_1 \vec{\boldsymbol{i}} + v_2 \vec{\boldsymbol{j}}$$

Imagen de Peggy and Marco Lachmann-Anke en Pixabay

¡¡¡Vamos a verlo!!!

DESCOMPOSICIÓN CANÓNICA DE VECTORES

Lo corroboramos …

Analíticamente

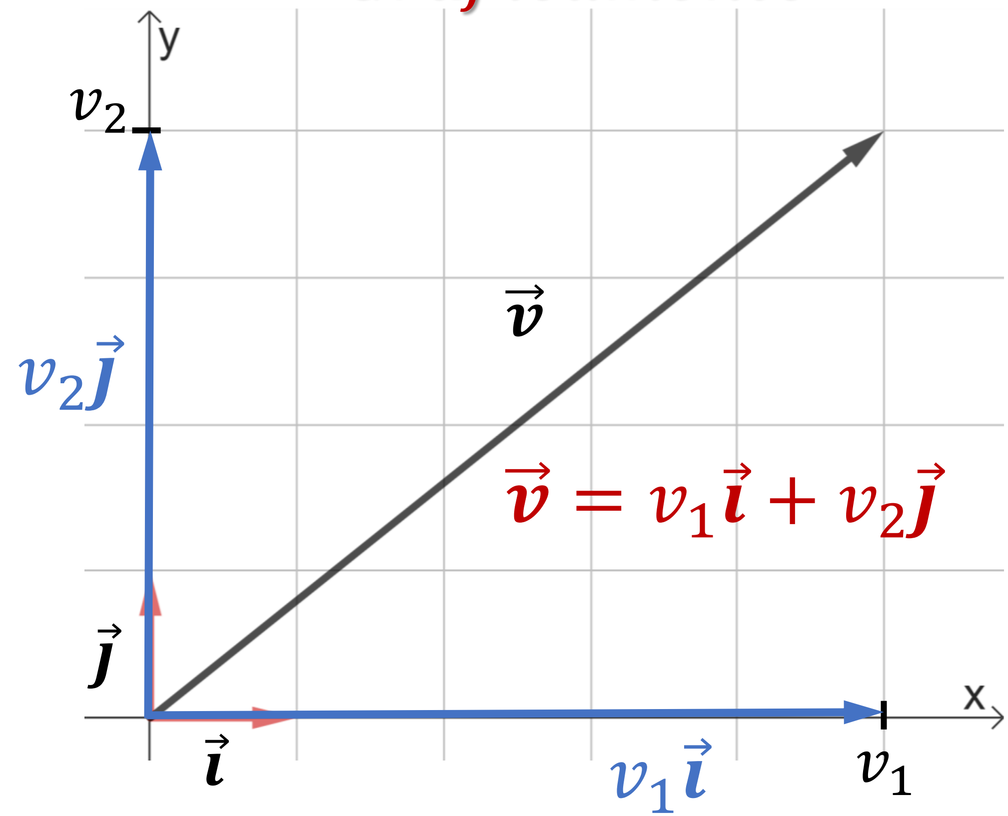
$$v_1\vec{\boldsymbol{i}} + v_2\vec{\boldsymbol{j}} = v_1\langle 1,0\rangle + v_2\langle 0,1\rangle$$

$$= \langle v_1, 0\rangle + \langle 0, v_2\rangle$$

$$= \langle v_1, v_2\rangle = \vec{\boldsymbol{v}}$$

$$\boxed{\vec{\boldsymbol{v}} = v_1\vec{\boldsymbol{i}} + v_2\vec{\boldsymbol{j}}}$$

Gráficamente



Ejemplos:

1) Encontrar la descomposición canónica de los vectores $\vec{\boldsymbol{v}} = \langle \mathbf{3}, -\mathbf{2} \rangle$ y $\vec{\boldsymbol{u}} = \left\langle -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}, -\mathbf{5} \right\rangle$.

2) Encontrar un vector ortogonal (perpendicular) al vector $\vec{\boldsymbol{\imath}}$ con módulo igual a 3. ¿Cuántos existe?

3) Encontrar un vector colineal al vector $\vec{\boldsymbol{\imath}} + \overrightarrow{\mathbf{2}\boldsymbol{j}}$ que sea unitario. ¿Cuántos existe?

Imagen de 3dman_eu en Pixabay

Ejemplo de Aplicación

Una mujer lanza una lancha desde una orilla de un río recto y quiere desembarcar en el muelle que se encuentra exactamente en frente en la orilla opuesta. Si la velocidad de la lancha (con respecto al agua) es de 30km/hr y el río fluye a 15km/hr, ¿en qué dirección debe dirigir la lancha a fin de llegar al punto deseado?

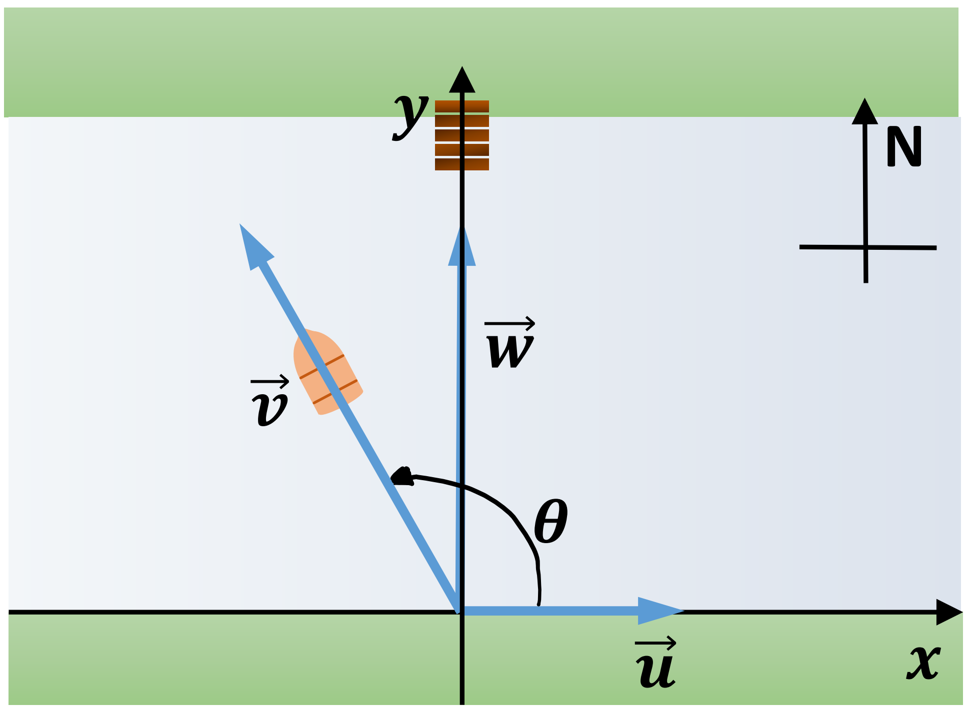


Imagen de 3dman_eu en Pixabay

Matemática

Clase 13 – Martes 27-6

Facultad de Ciencias Agrarias y Forestales
UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PLATA

Cronograma

12-jun	Tema 8: Vectores	Trabajo Práctico N°6: Vectores
19-jun	**Feriado**	Trabajo Práctico N°6: Vectores
26-jun	Tema 8: Vectores	Trabajo Práctico N°6: Vectores

VECTORES

Imagen de Peggy und Marco Lachmann-Anke en Pixabay

La clase pasada vimos…

- **EL CONCEPTO DE VECTOR**
  - Representaciones de vectores
  - Operaciones con vectores
    - Suma
    - Producto por un escalar
- **VECTORES EN UN SISTEMA DE COORDENADAS**

VECTORES EN UN SISTEMA DE COORDENADAS

Vimos que …

Para ciertos propósitos es útil graficar los vectores dentro de un sistema de coordenadas.

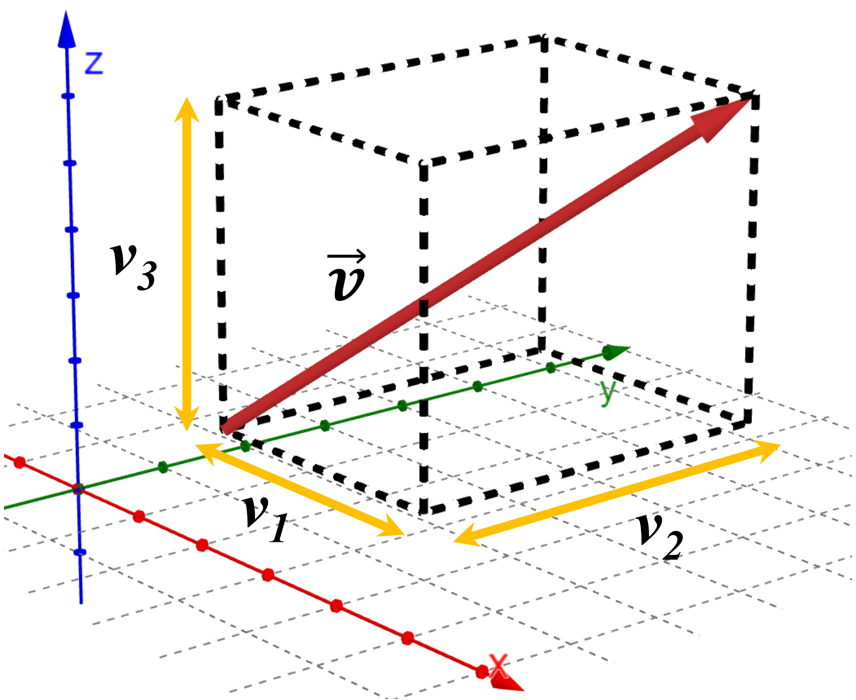
$\mathcal{R}^2$ $\mathcal{R}^3$

Vamos a generalizar lo visto en $\mathcal{R}^2$ para $\mathcal{R}^3$

¿Cómo se representa un vector a partir de sus componentes en el espacio?

$\vec{v}$ expresado con sus componentes en $\mathcal{R}^3$

$$\vec{v} = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$$



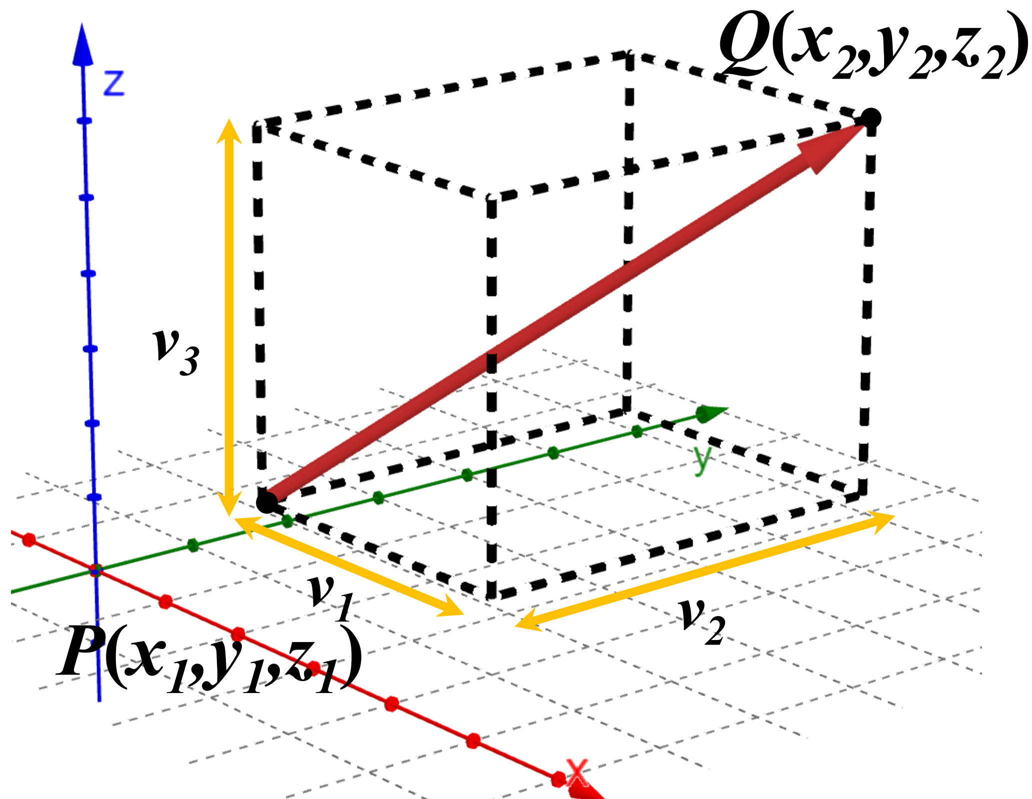
- v_1 es la variación del vector $\vec{v}$ en la *dirección del eje x*.
- v_2 e la variación del vector $\vec{v}$ en la *dirección del eje y*.
- v_3 e la variación del vector $\vec{v}$ en la *dirección del eje z*.

Componentes *de un vector a partir de sus puntos de origen y extremo*

$$\vec{\boldsymbol{v}} = \langle \boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \boldsymbol{v_3} \rangle$$

Las componentes del vector $\vec{\boldsymbol{v}}$ se pueden calcular a partir de las coordenadas de los puntos:

$$\begin{cases} v_1 = x_2 - x_1 \\ v_2 = y_2 - y_1 \\ v_3 = z_2 - z_1 \end{cases}$$



***Módulo** de un vector en $\mathcal{R}^3$*

$$\vec{v} = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$$

El módulo de $\vec{v}$ se calcula a partir de las componentes como:

$$|\vec{v}| = \sqrt{(v_1)^2 + (v_2)^2 + (v_3)^2}$$

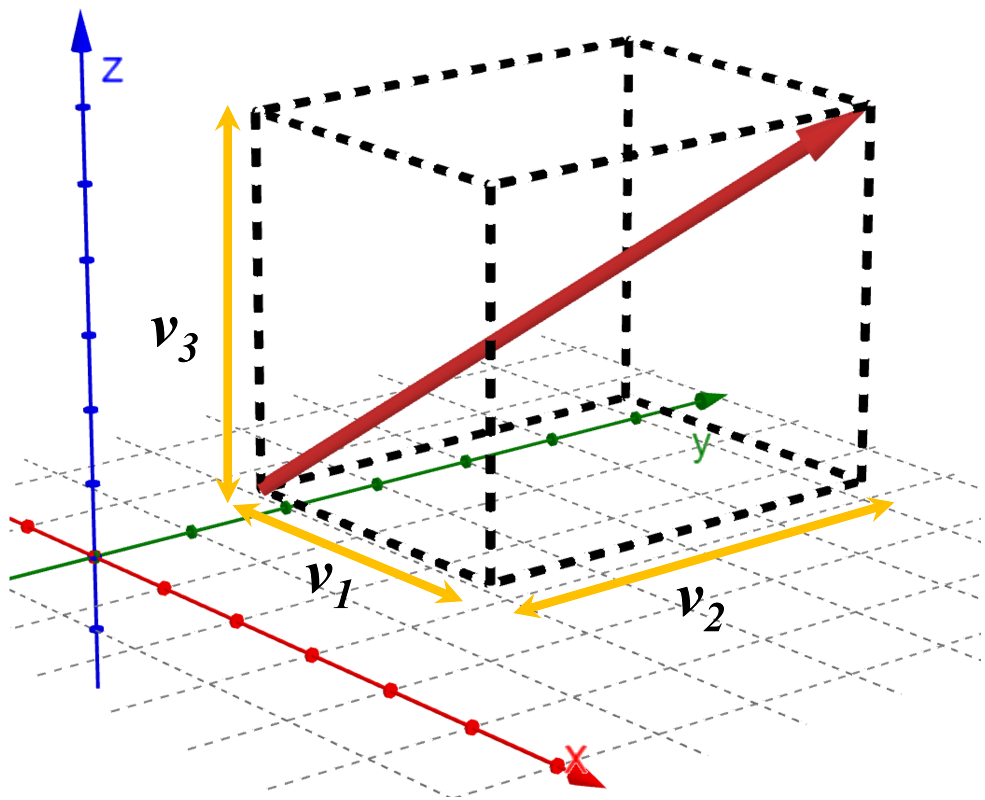


Imagen de Peggy und Marco Lachmann-Anke en Pixabay

Volvemos a las operaciones entre vectores…

SUMA DE VECTORES

PRODUCTO DE UN ESCALAR POR UN VECTOR

CÁLCULO ANALÍTICO EN $\mathcal{R}^3$

SUMA DE VECTORES EN EL PLANO

La **suma de vectores en $\mathcal{R}^3$** es análoga a lo visto en $\mathcal{R}^2$

Si $\vec{\boldsymbol{u}}$ y $\vec{\boldsymbol{v}}$ son vectores con componentes:

$$\vec{\boldsymbol{v}} = \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \rangle \text{ y } \vec{\boldsymbol{u}} = \langle \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3 \rangle$$

El **vector suma** es un nuevo vector, con componentes:

$$\vec{\boldsymbol{v}} + \vec{\boldsymbol{u}} = \langle \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{v}_2 + \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{v}_3 + \boldsymbol{u}_3 \rangle$$

PRODUCTO DE UN VECTOR POR UN *ESCALAR*

El **producto de un vector por un escalar en $\mathcal{R}^3$** es análogo a lo visto en $\mathcal{R}^2$

Si $\boldsymbol{t}$ en un número real cualquiera (escalar) y $\vec{\boldsymbol{v}}$ es un vector con componentes:

$$\vec{\boldsymbol{v}} = \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \rangle$$

El **producto de $\vec{\boldsymbol{v}}$ por $\boldsymbol{t}$** es un nuevo vector, con componentes:

$$\mathrm{t}\vec{\boldsymbol{v}} = \langle \boldsymbol{t}\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{t}\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{t}\boldsymbol{v}_3 \rangle$$

Ejemplos:

1) Dados los vectores $\vec{\boldsymbol{v}} = \langle \mathbf{3}, \mathbf{-2}, \mathbf{1} \rangle$ y $\vec{\boldsymbol{u}} = \langle \mathbf{-2}, \mathbf{5}, \mathbf{0} \rangle$ determinar el resultado de la operación: $2\vec{\boldsymbol{v}} - \vec{\boldsymbol{u}}$.

2) Encontrar dos vectores colineales a $\vec{\boldsymbol{v}} = \langle \mathbf{3}, \mathbf{-2}, \mathbf{1} \rangle$ con módulo igual a 4.

3) Calcular el módulo del vector $\vec{\boldsymbol{w}} = \langle \mathbf{1}, \mathbf{-2}, \mathbf{2} \rangle$ y encontrar el vector unitario de $\vec{\boldsymbol{w}}$.

Imagen de 3dman_eu en Pixabay

Versores fundamentales

Los *versores fundamentales* de $\mathcal{R}^3$ son los vectores $\vec{\boldsymbol{\imath}}, \vec{\boldsymbol{\jmath}}$ y $\vec{\boldsymbol{k}}$

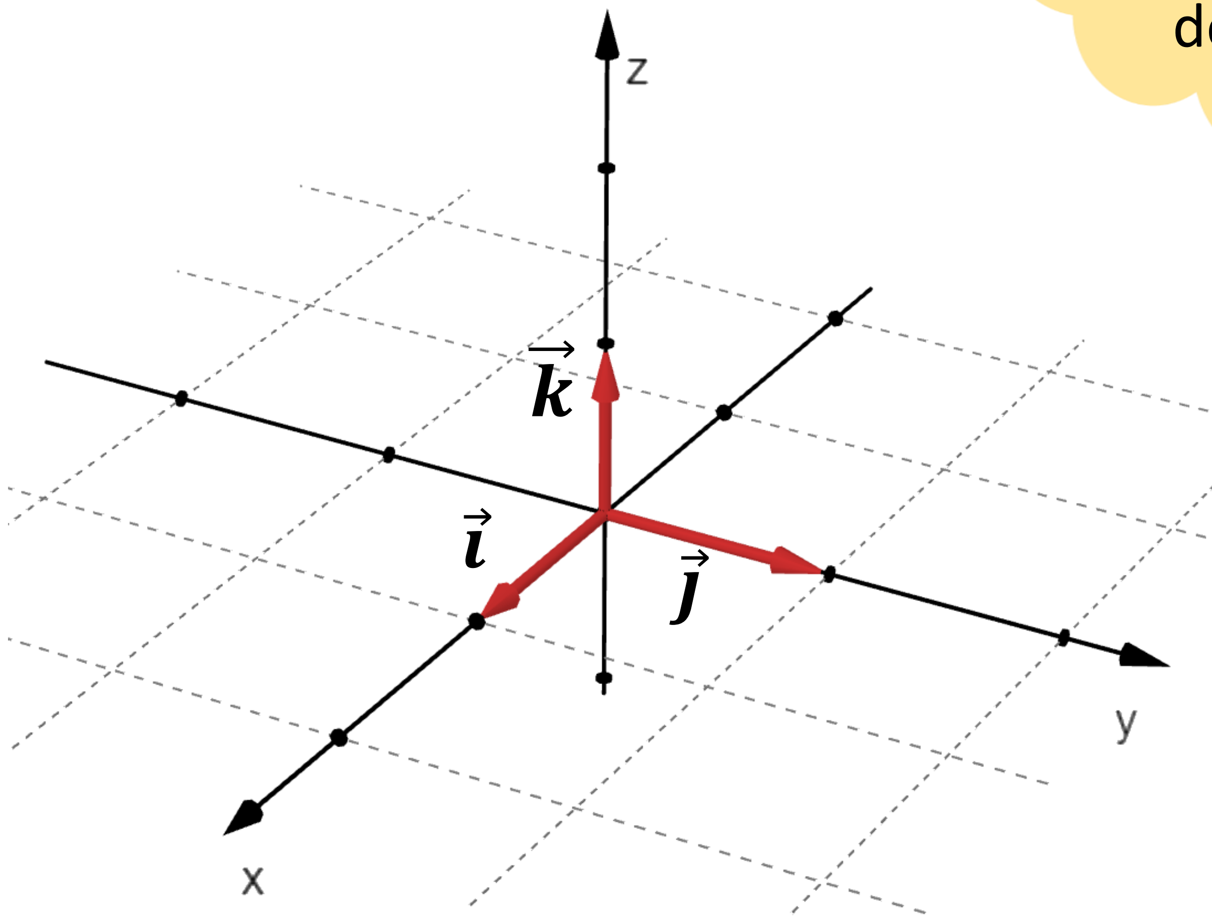
Los *versores fundamentales* tienen *módulo igual a 1*

- $\vec{\boldsymbol{\imath}}$ tiene *dirección* y *sentido del* ***eje x positivo***.
- $\vec{\boldsymbol{\jmath}}$ tiene *dirección* y *sentido del* ***eje y positivo***.
- $\vec{\boldsymbol{k}}$ tiene *dirección* y *sentido del* ***eje z positivo***.

Observemos …

Imagen de Peggy und Marco Lachmann-Anke en Pixabay

¿Cuáles son las componentes de $\vec{\boldsymbol{i}}$, $\vec{\boldsymbol{j}}$ y $\overrightarrow{\boldsymbol{k}}$?



$$\vec{\boldsymbol{i}} = \langle 1, 0, 0 \rangle$$

$$\vec{\boldsymbol{j}} = \langle 0, 1, 0 \rangle$$

$$\overrightarrow{\boldsymbol{k}} = \langle 0, 0, 1 \rangle$$

DESCOMPOSICIÓN CANÓNICA DE VECTORES

Todo vector $\vec{\boldsymbol{v}}$ de $\boldsymbol{\mathcal{R}}^{3}$, con componentes: $\vec{\boldsymbol{v}} = \langle \boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \boldsymbol{v_3} \rangle$ escribir utilizando los *versores fundamentales* como:

$$\vec{\boldsymbol{v}} = v_1\vec{\boldsymbol{i}} + v_2\vec{\boldsymbol{j}} + v_3\vec{\boldsymbol{k}}$$

$Lo\ corroboramos\ \ldots$

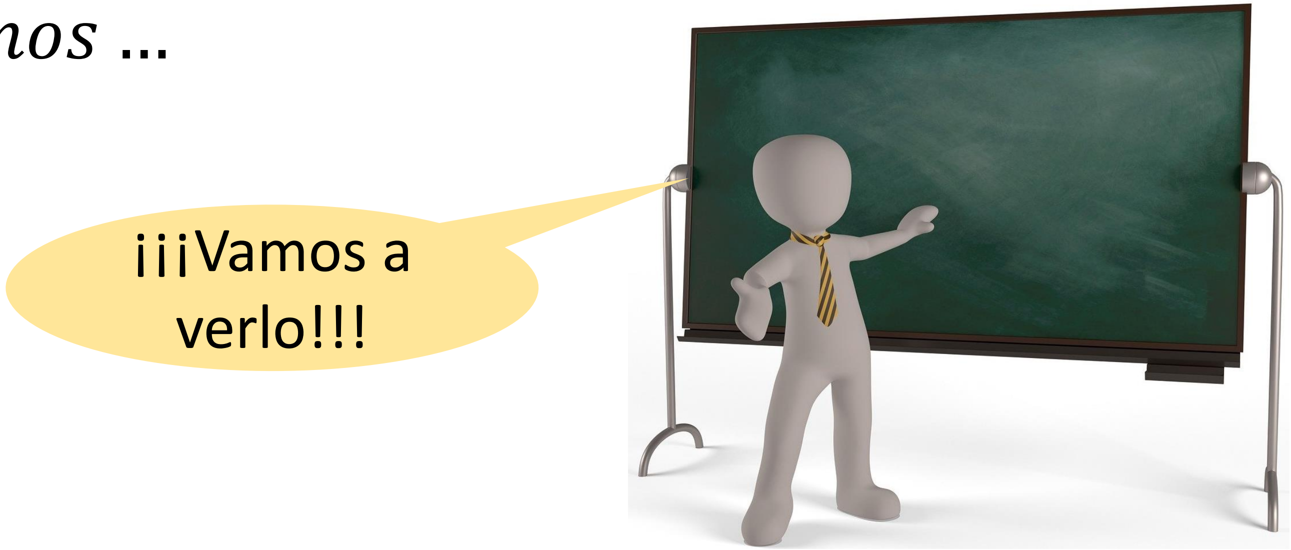


Imagen de Peggy and Marco Lachmann-Anke en Pixabay

Ejemplos:

1) Dados los vectores $\vec{v} = \langle 3, -2, 1 \rangle$ y $\vec{u} = \langle -2, 5, 0 \rangle$ escribir la descomposición canónica de cada uno.

2) Mostrar que el vector $\vec{v} = -\vec{i} + 3\vec{j} - 5\vec{k}$ tiene componentes $\langle -1, 3, -5 \rangle$.

Imagen de 3dman_eu en Pixabay

Imagen de Peggy und Marco Lachmann-Anke en Pixabay

Seguimos…

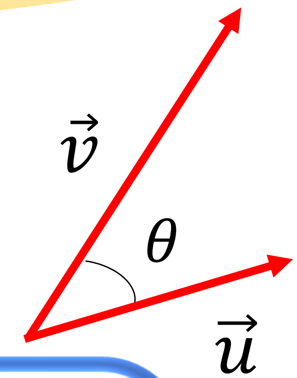
PRODUCTO ENTRE VECTORES

PRODUCTO ESCALAR

PRODUCTO VECTORIAL

PRODUCTO ESCALAR ENTRE VECTORES

El ***producto escalar*** entre vectores da como resultado un **ESCALAR** (es decir un **número**)



Definición:

Se indica con un **punto** (o sin nada)

El **producto escalar** entre los vectores $\vec{v}$ y $\vec{u}$ es el **número**:

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = |\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cos(\theta)$$

Donde θ es el ángulo comprendido entre los vectores.

PRODUCTO ESCALAR ENTRE VECTORES

Cálculo a partir de las componentes del vector:

En $\mathcal{R}^3$

Dados los vectores $\vec{v} = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ y $\vec{u} = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle$, el producto escalar entre ellos se calcula como:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3$$

En $\mathcal{R}^2$

Dados los vectores $\vec{v} = \langle v_1, v_2 \rangle$ y $\vec{u} = \langle u_1, u_2 \rangle$ el producto escalar entre ellos se calcula como:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2$$

Ejemplos:

1) Dados los vectores $\vec{\boldsymbol{v}} = \langle -\mathbf{1}, \mathbf{2} \rangle$ y $\vec{\boldsymbol{u}} = \langle \mathbf{2}, \mathbf{9} \rangle$ encontrar el producto escalar $\vec{\boldsymbol{v}} \cdot \vec{\boldsymbol{u}}$.

2) Dados los vectores $\vec{\boldsymbol{v}} = -\vec{\boldsymbol{\imath}} + \mathbf{3}\vec{\boldsymbol{\jmath}} - \mathbf{5}\vec{\boldsymbol{k}}$ y $\vec{\boldsymbol{u}} = \langle \mathbf{1}/\mathbf{2}\,, \mathbf{0}, \mathbf{2} \rangle$ encontrar el producto escalar $\vec{\boldsymbol{v}} \cdot \vec{\boldsymbol{u}}$.

Imagen de 3dman_eu en Pixabay

PROPIEDADES DEL PRODUCTO ESCALAR

1. $\vec{\boldsymbol{u}} \cdot \vec{\boldsymbol{v}} = \vec{\boldsymbol{v}} \cdot \vec{\boldsymbol{u}}$

2. $(a\vec{\boldsymbol{u}}) \cdot \vec{\boldsymbol{v}} = a\,(\vec{\boldsymbol{u}} \cdot \vec{\boldsymbol{v}}) = \vec{\boldsymbol{u}} \cdot (a\,\vec{\boldsymbol{v}})$

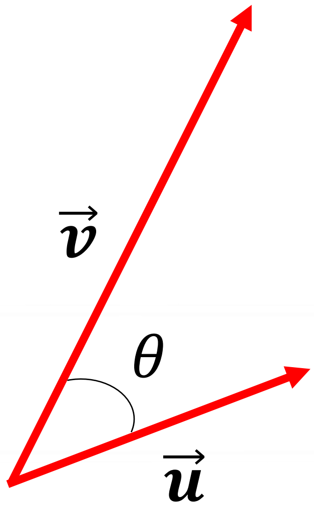
3. $(\vec{\boldsymbol{u}} + \vec{\boldsymbol{v}}) \cdot \vec{\boldsymbol{w}} = \vec{\boldsymbol{u}} \cdot \vec{\boldsymbol{w}} + \vec{\boldsymbol{v}} \cdot \vec{\boldsymbol{w}}$

4. $\vec{\boldsymbol{u}} \cdot \vec{\boldsymbol{u}} = |\vec{\boldsymbol{u}}|^2$

ÁNGULO ENTRE VECTORES

Dados los vectores $\vec{\boldsymbol{v}}$ y $\vec{\boldsymbol{u}}$, si θ es el ángulo entre ellos, entonces a partir de la definición de producto escalar se puede encontrar el ángulo θ:

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = |\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cos(\boldsymbol{\theta}) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\cos(\boldsymbol{\theta}) = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}}$$

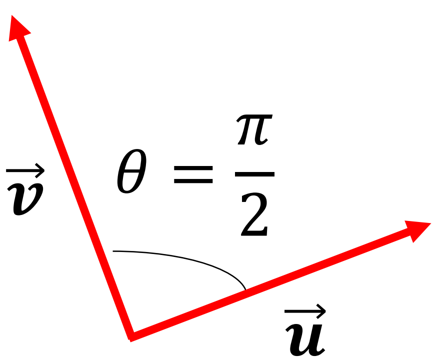


VECTORES ORTOGONALES

Teorema

Dados los vectores $\vec{\boldsymbol{v}}$ y $\vec{\boldsymbol{u}}$ no nulos (de $\mathcal{R}^2$ o $\mathcal{R}^3$):

$\vec{\boldsymbol{v}}$ y $\vec{\boldsymbol{u}}$ son ortogonales <u>si y sólo si</u> $\vec{\boldsymbol{v}} \cdot \vec{\boldsymbol{u}} = \mathbf{0}$



Lo demostramos…

Imagen de Peggy and Marco Lachmann-Anke en Pixabay

Ejemplos:

1) Dados los vectores $\vec{v} = t\vec{i} - 2\vec{j}$ y $\vec{u} = t\vec{i} + 6\vec{j}$, hallar el valor de t para que $\vec{v}$ y $\vec{u}$ sean ortogonales. Graficar.

2) Encontrar el vector $\vec{w}$ de $\mathcal{R}^2$ que sea ortogonal con $\vec{u} = -\overrightarrow{2i} - 3/2\,\vec{j}$ y tenga módulo igual a 5. Graficar.

3) ¿Qué condición deben cumplir $\vec{u}$ y $\vec{v}$ para que los vectores $\vec{u} + \vec{v}$ y $\vec{u} - \vec{v}$ sean ortogonales?

Imagen de 3dman_eu en Pixabay

PRODUCTO VECTORIAL ENTRE VECTORES

El ***producto vectorial*** entre vectores da como resultado un nuevo **VECTOR**

Notación:

Se indica con una **cruz**

Para diferenciar ambos productos, es necesario utilizar símbolos diferentes para cada uno de los productos.

El **producto vectorial** entre los vectores $\vec{v}$ y $\vec{u}$ se representa:

$$\vec{u} \times \vec{v}$$

PRODUCTO VECTORIAL ENTRE VECTORES

Veamos la definición de ***producto vectorial***

El producto vectorial solamente está definido en $\mathcal{R}^3$

Si $\vec{\boldsymbol{u}}$ y $\vec{\boldsymbol{v}}$ son no nulos y no colineales, el producto vectorial $\vec{\boldsymbol{u}} \times \vec{\boldsymbol{v}}$ es un nuevo vector que cumple:

¿Regla de la mano derecha?

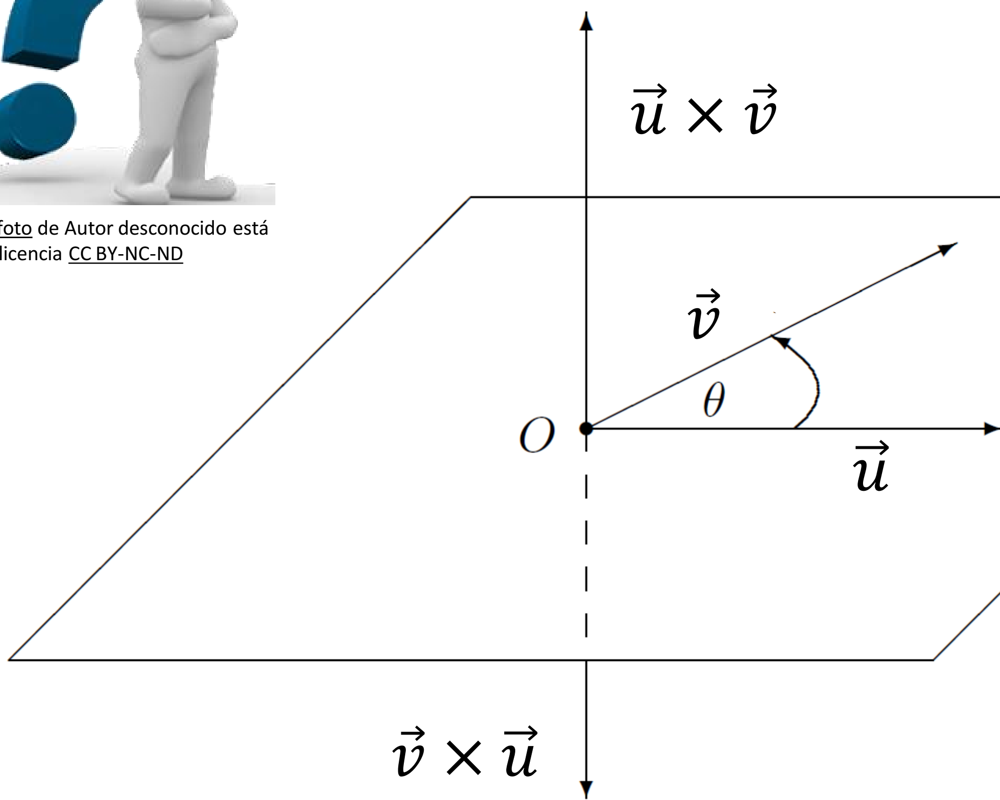
I) **Dirección:** ortogonal con $\vec{\boldsymbol{u}}$ y con $\vec{\boldsymbol{v}}$.

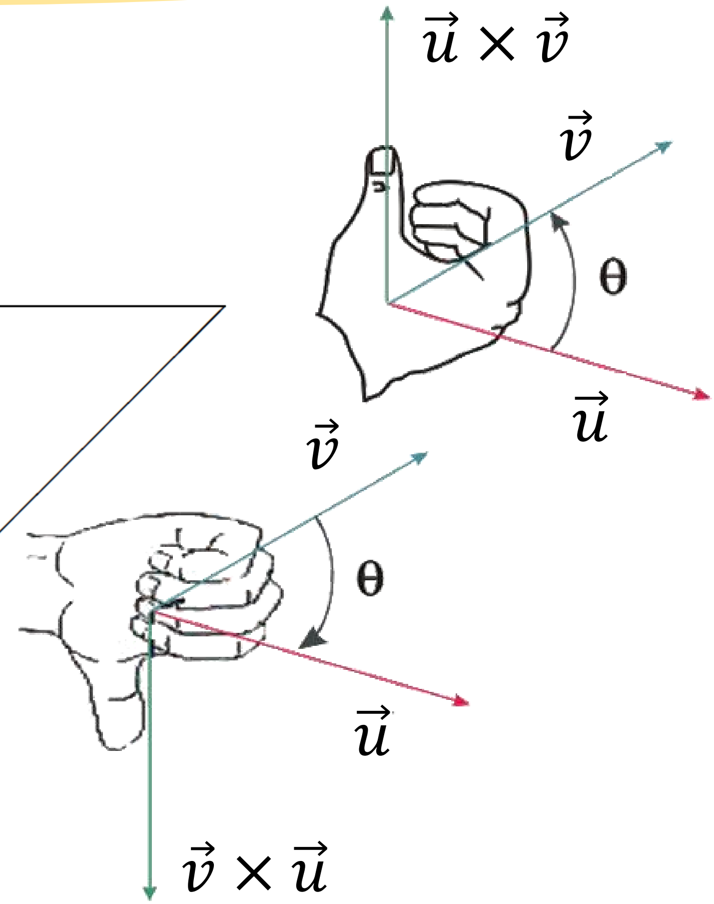
II) **Sentido:** Regla de *la mano derecha* o del *destornillador*.

III) **Módulo:** $\left|\vec{u} \times \vec{v}\right| = \left|\vec{u}\right| \cdot \left|\vec{v}\right| sen\left(\boldsymbol{\theta}\right)$

PRODUCTO VECTORIAL ENTRE VECTORES

Veamos qué es la ***regla de la mano derecha*** o del ***destornillador***



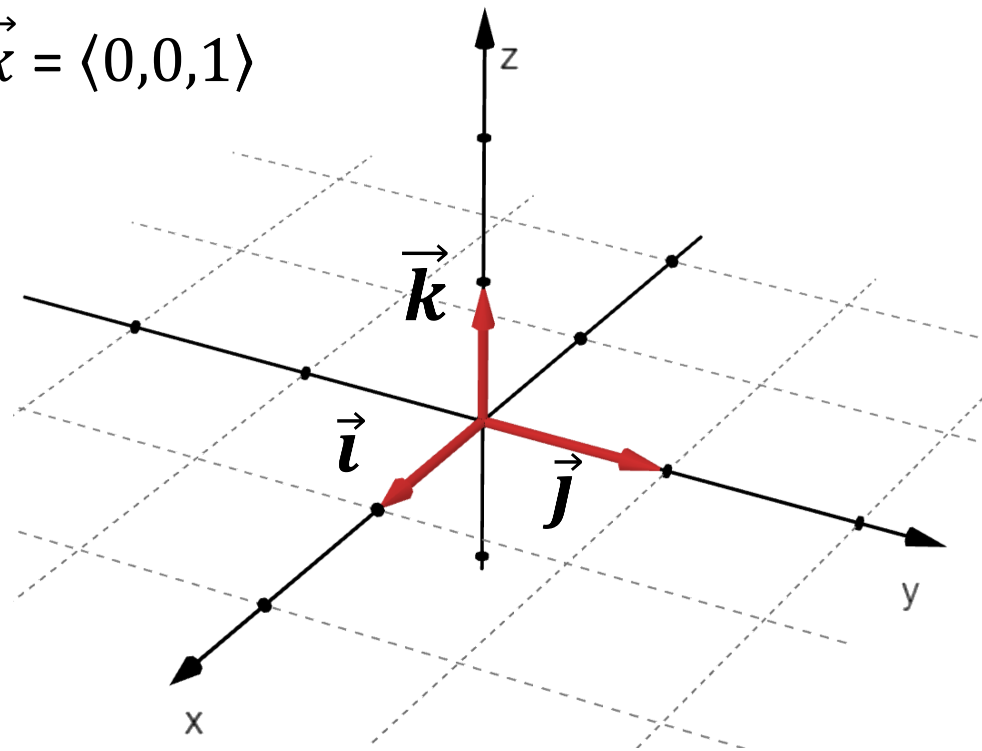


PRODUCTO VECTORIAL ENTRE VECTORES

Imagen de Peggy und Marco Lachmann-Anke en Pixabay

Producto vectorial de los versores fundamentales

$\vec{\imath} = \langle 1,0,0 \rangle \quad \vec{\jmath} = \langle 0,1,0 \rangle \quad \vec{k} = \langle 0,0,1 \rangle$



$$\vec{\imath} \times \vec{\jmath} = \vec{k} \qquad \vec{\jmath} \times \vec{k} = \vec{\imath} \qquad \vec{k} \times \vec{\imath} = \vec{\jmath}$$

$$\vec{\jmath} \times \vec{\imath} = -\vec{k} \qquad \vec{k} \times \vec{\jmath} = -\vec{\imath} \qquad \vec{\imath} \times \vec{k} = -\vec{\jmath}$$

$$\vec{\imath} \times \vec{\imath} = 0 \qquad \vec{\jmath} \times \vec{\jmath} = 0 \qquad \vec{k} \times \vec{k} = 0$$

PRODUCTO VECTORIAL ENTRE VECTORES

Cálculo a partir de las componentes del vector:

Dados los vectores $\vec{v} = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ y $\vec{u} = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle$, encontramos sus descomposiciones canónicas y luego podemos realizar el producto vectorial como:

$$\vec{\boldsymbol{u}} \times \vec{\boldsymbol{v}} = \left(u_1\vec{\boldsymbol{\imath}} + u_2\vec{\boldsymbol{\jmath}} + u_3\vec{\boldsymbol{k}}\right) \times \left(v_1\vec{\boldsymbol{\imath}} + v_2\vec{\boldsymbol{\jmath}} + v_3\vec{\boldsymbol{k}}\right)$$

Usando las propiedades y reacomodando, se puede llegar a:

$$\vec{\boldsymbol{u}} \times \vec{\boldsymbol{v}} = \vec{\boldsymbol{\imath}}\,(u_2v_3 - u_3v_2) - \vec{\boldsymbol{\jmath}}\,(u_1v_3 - u_3v_1) + \vec{\boldsymbol{k}}\,(u_1v_2 - u_2v_1)$$

PRODUCTO VECTORIAL ENTRE VECTORES

Cálculo a partir de las componentes del vector:

Dados los vectores $\vec{v} = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ y $\vec{u} = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle$, el producto vectorial entre ellos se calcula como:

$$\vec{\boldsymbol{u}} \times \vec{\boldsymbol{v}} = \vec{\boldsymbol{i}}\,(u_2 v_3 - u_3 v_2) - \vec{\boldsymbol{j}}\,(u_1 v_3 - u_3 v_1) + \vec{\boldsymbol{k}}\,(u_1 v_2 - u_2 v_1)$$

Miremos FUERTE:

Se puede calcular considerando lo siguiente:

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

PROPIEDADES DEL PRODUCTO VECTORIAL

1. $\vec{\boldsymbol{u}} \times \vec{\boldsymbol{v}} = -(\vec{\boldsymbol{v}} \times \vec{\boldsymbol{u}})$
2. $(a\vec{\boldsymbol{u}}) \times \vec{\boldsymbol{v}} = a\,(\vec{\boldsymbol{u}} \times \vec{\boldsymbol{v}}) = \vec{\boldsymbol{u}} \times (a\,\vec{\boldsymbol{v}})$
3. $\vec{\boldsymbol{w}} \times (\vec{\boldsymbol{u}} + \vec{\boldsymbol{v}}) = \vec{\boldsymbol{w}} \times \vec{\boldsymbol{u}} \cdot + \vec{\boldsymbol{w}} \times \vec{\boldsymbol{v}}$
4. $(\vec{\boldsymbol{u}} + \vec{\boldsymbol{v}}) \times \vec{\boldsymbol{w}} = \vec{\boldsymbol{u}} \times \vec{\boldsymbol{w}} + \vec{\boldsymbol{v}} \times \vec{\boldsymbol{w}}$

Ejemplos:

1) Calcular el producto vectorial entre los vectores: $\vec{u} = \langle 2, -3, 4 \rangle$ y $\vec{v} = \langle -1, -5, 2 \rangle$.

2) Hallar un vector unitario que sea ortogonal a los vectores $\vec{u} = \langle 3,2,-1 \rangle$ y $\vec{v} = \langle -1, -2, 2 \rangle$.

Imagen de 3dman_eu en Pixabay

Matemática

Clase 14 – Martes 4-7

Facultad de Ciencias Agrarias y Forestales
UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PLATA

Cronograma

16	3-jul	Tema 9: Rectas y Planos en el espacio - Primera parte	Trabajo Práctico N°7: Rectas y planos en R3
17	10-jul	Tema 9: Rectas y Planos en el espacio - Segunda parte	Trabajo Práctico N°7: Rectas y planos en R3
		RECESO DE INVIERNO	
18	31-jul	Tema 9: Rectas y Planos en el espacio - Tercera parte	Trabajo Práctico N°7: Rectas y planos en R3

Imagen de Peggy und Marco Lachmann-Anke en Pixabay

RECTAS Y PLANOS

¿Dónde?

$$\mathcal{R}^3$$

¿Qué vamos a estudiar en estas clases que nos quedan de este bloque?

PRIMERO REPASAMOS ALGUNOS CONCEPTOS DE VECTORES EN $\mathcal{R}^3$

I) $\vec{u}$ y $\vec{v}$ tienen **igual dirección (*colineales*)** $\Leftrightarrow$ $\vec{u} = t\vec{v}\,;\quad t\epsilon\mathcal{R}$

II) $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son **perpendiculares (*ortogonales*)** $\Leftrightarrow$ $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

III) $\vec{u} \times \vec{v}$ da otro vector $\vec{w}$ que cumple: $\vec{w} \perp \vec{u} \;\wedge\; \vec{w} \perp \vec{u}$

($\vec{u}$ y $\vec{v}$ no colineales)

IV) Dados $\vec{u} = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle$ y $\vec{v} = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$

$\vec{u} = \vec{v}$ $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} u_1 = v_1 \\ u_2 = v_2 \\ u_3 = v_3 \end{cases}$

¡Empecemos con rectas!

Imagen de Peggy and Marco Lachmann-Anke en Pixabay

Recordemos primero algunas cosas sobre rectas en $\mathcal{R}^2$ …

¿Cómo es la ecuación? ¿De qué depende? ¿Quién determina su inclinación? ¿Cómo sé dónde se ubica en el plano?

Imagen de Peggy and Marco Lachmann-Anke en Pixabay

Para determinar la ecuación de una recta …

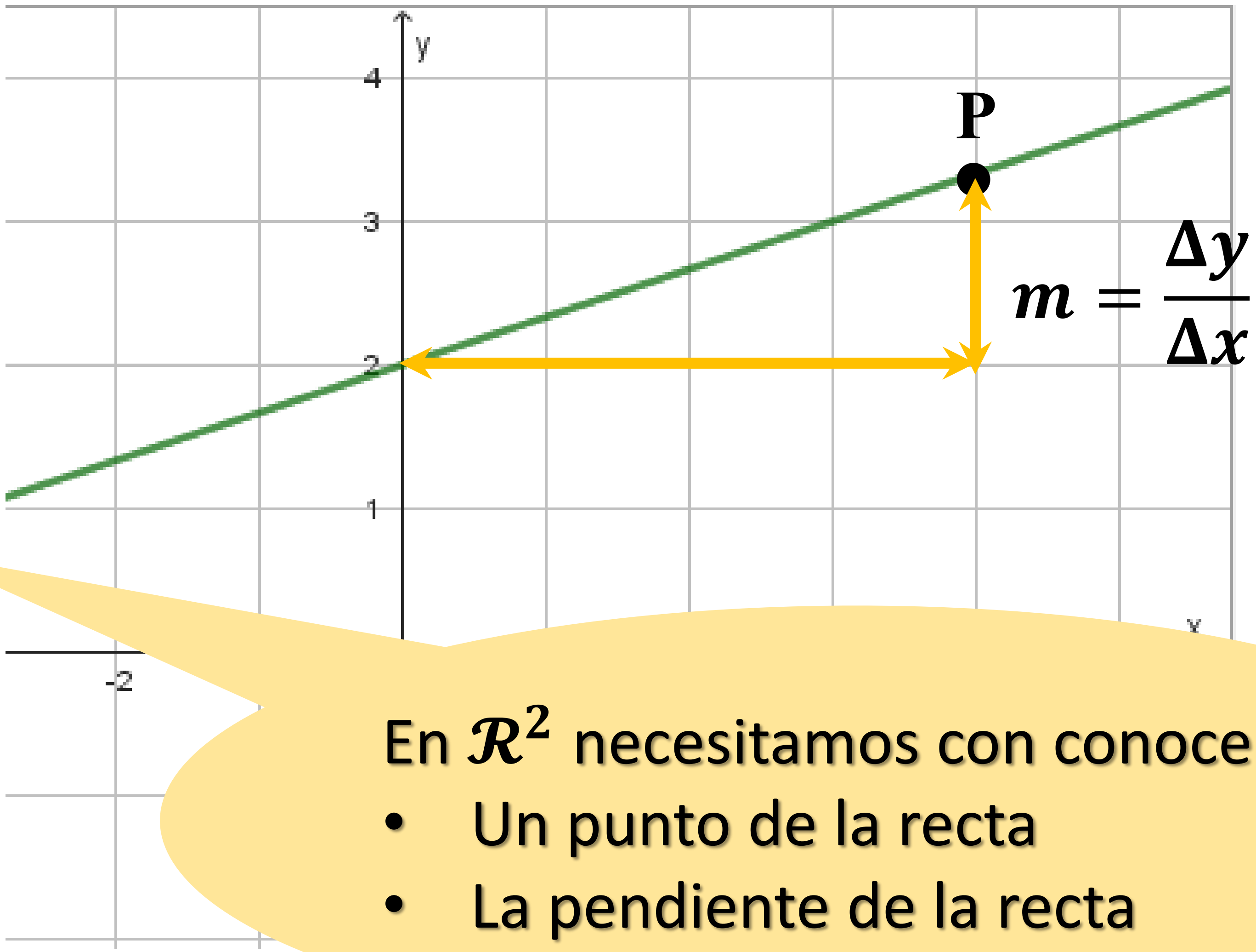


Imagen de Peggy and Marco Lachmann-Anke en Pixabay

En $\mathcal{R}^2$ necesitamos con conocer:

- Un punto de la recta
- La pendiente de la recta

Pero si pensamos en rectas en $\mathcal{R}^3$, ¿qué sería la pendiente de la recta?

¿Cómo podemos caracterizar la *dirección* de la recta?

Imagen de Peggy and Marco Lachmann-Anke en Pixabay

¡¡VECTORES!!

Imagen de 3dman_eu en Pixabay

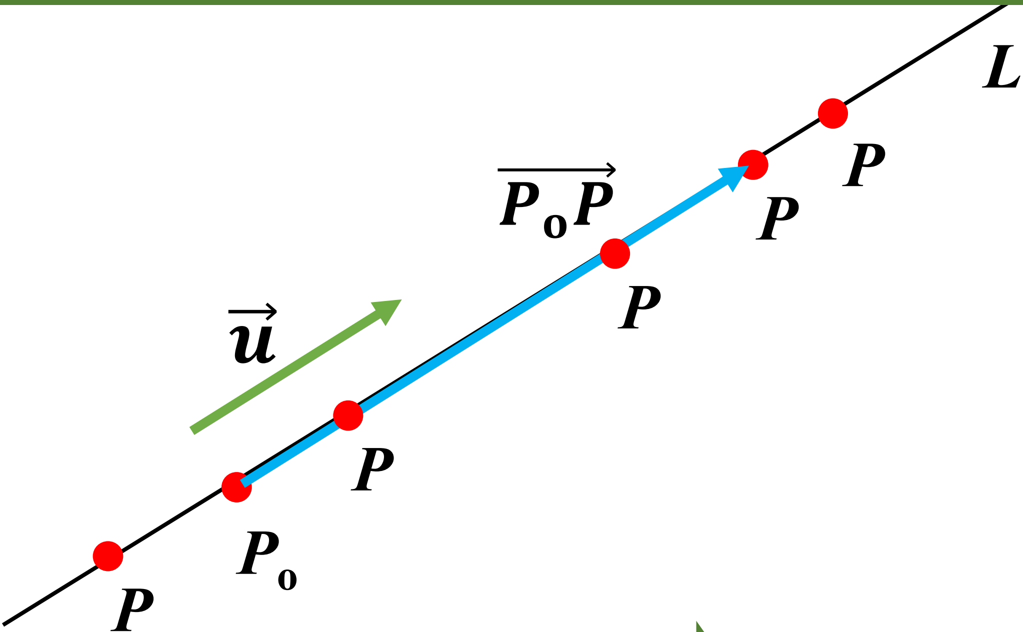
Entonces…

Para determinar la ecuación de una recta en $\mathcal{R}^3$

Se necesita …

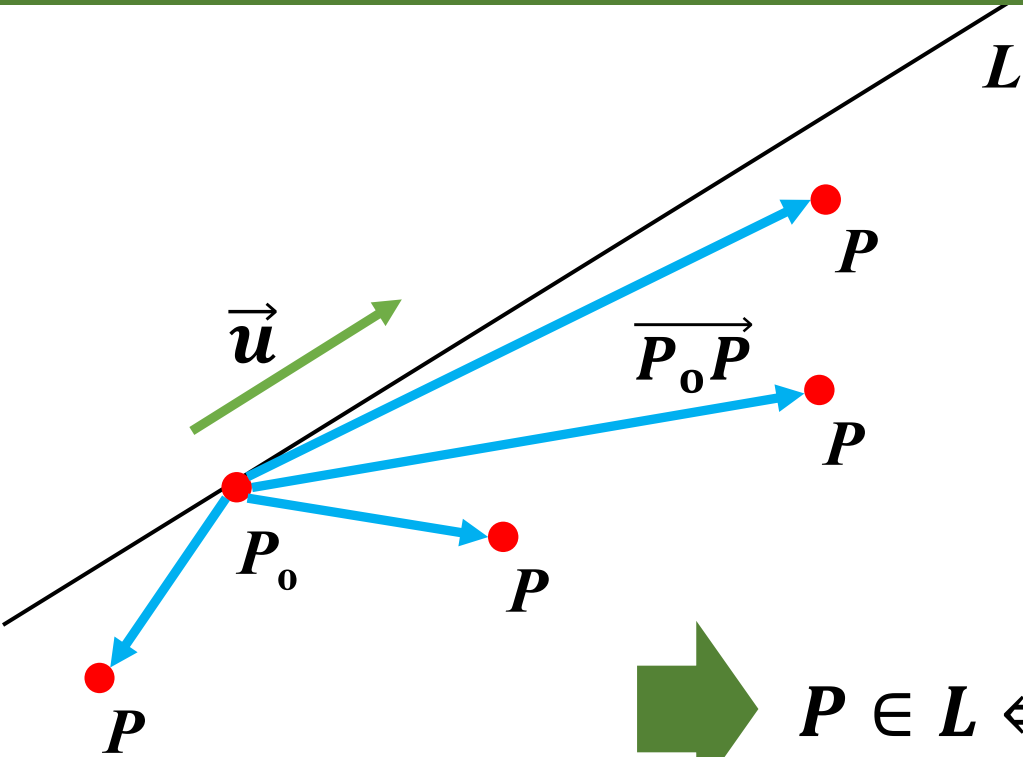
- Un **punto** de la recta: $\boldsymbol{P_O(x_o, y_o, z_o)}$.
- Un **vector** que tenga la *misma dirección* que la recta: $\vec{u} = \langle a, b, c \rangle$

Vector Director



$$P \in L \Leftrightarrow \overrightarrow{P_oP} \text{ y } \vec{u} \text{ son colineales}$$

$$\overrightarrow{P_oP} = t\vec{u} \quad ; t \in \mathcal{R}$$



$P \in L \Leftrightarrow \overrightarrow{P_oP}$ y $\vec{u}$ **son colineales**

$$\overrightarrow{P_oP} = t\vec{u} \quad ; \; t \in \mathcal{R}$$

$P \notin L \Leftrightarrow \overrightarrow{P_oP}$ y $\vec{u}$ **NO son colineales**

$$\overrightarrow{P_oP} \neq t\vec{u}; \; t \in \mathcal{R}$$

ECUACIÓN VECTORIAL DE LA RECTA

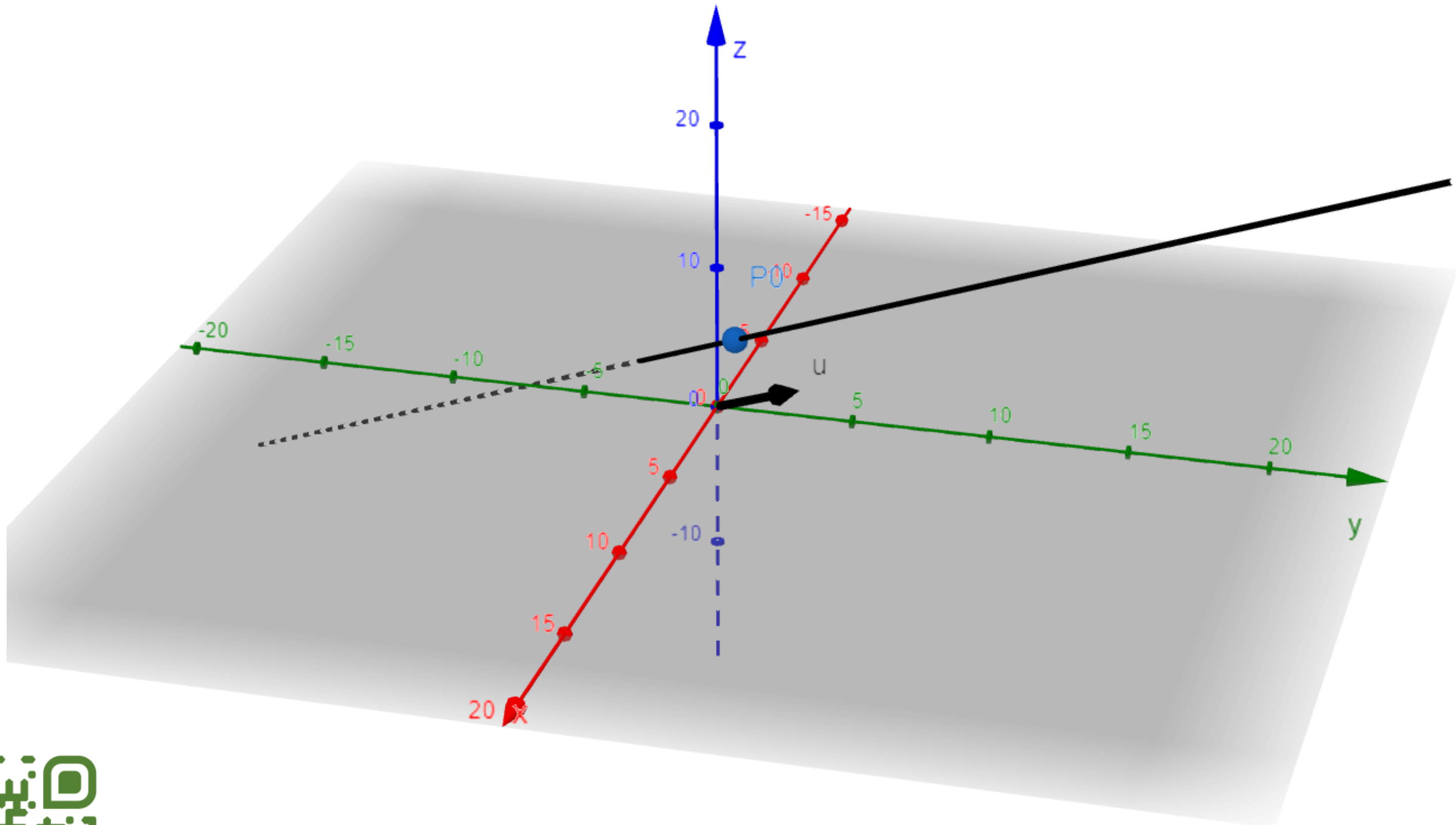
Si $\vec{u} = \langle a, b, c \rangle$ es el vector director de una recta L y $P_o(x_o, y_o, z_o)$ es un punto de la recta, entonces si $P(x, y, z)$ es un punto cualquiera que pertenece a la recta, se cumple la siguiente igualdad:

$$\overrightarrow{P_oP} = t\vec{u} \;\; ; \;\; t \in \mathcal{R}$$

$$\boldsymbol{\langle x - x_o, y - y_o, z - z_o \rangle \;=\; t\langle a, b, c \rangle \;\; ; t \in \mathcal{R}}$$

Ecuación vectorial de la recta que pasa el **punto** P_o y tiene **vector director** $\vec{u}$

ECUACIÓN VECTORIAL DE LA RECTA



GeoGebra

ECUACIÓN VECTORIAL DE LA RECTA

Ejemplo: Ecuación vectorial de la recta

1) Determinar la ecuación vectorial de la recta que pasa por el punto $P_o(5,-2,3)$ y tiene vector director $\vec{u} = \langle -1,2,4 \rangle$.

2) Encontrar la ecuación vectorial del *eje y*.

Imagen de 3dman_eu en Pixabay

ECUACIONES PARAMÉTRICAS DE LA RECTA

A partir de la ecuación vectorial:

$$\langle x - x_o, y - y_o, z - z_o \rangle = t\langle a, b, c \rangle \;; t \in \mathcal{R}$$

Igualando los vectores y operando algebraicamente, tenemos:

$$\begin{cases} x = ta + x_o \\ y = tb + y_o \\ z = tc + z_o \end{cases} \quad t \in \mathcal{R}$$

Ecuaciones paramétricas de la recta que pasa el punto $P_o(x_o, y_o, z_o)$ y tiene vector director $\vec{u} = \langle a, b, c \rangle$

Observemos...

Imagen de Peggy und Marco Lachmann-Anke en Pixabay

Coordenadas del **punto** que está en la recta

$$\begin{cases} x = ta + x_o \\ y = tb + y_o \\ z = tc + z_o \end{cases} \qquad t \in \mathcal{R}$$

Componentes del **vector director** de la recta

ECUACIONES PARAMÉTRICAS DE LA RECTA

Ejemplo: Ecuaciones paramétricas de la recta

1) Determinar las ecuaciones paramétricas del ejemplo anterior: $P_o(5, -2,3)$ y tiene vector director $\vec{u} = \langle -1,2,4 \rangle$

2) Encontrar las ecuaciones paramétricas del ***eje y***.

Imagen de 3dman_eu en Pixabay

ECUACIONES SIMÉTRICAS DE LA RECTA

A partir de las ecuaciones paramétricas:

$$\begin{cases} x = ta + x_o \\ y = tb + y_o \qquad t \in \mathcal{R} \\ z = tc + z_o \end{cases}$$

Para que existan las ecuaciones simétricas $a, b, c \neq 0$

Imagen de Peggy and Marco Lachmann-Anke en Pixabay

Despejamos el parámetro $\boldsymbol{t}$ de las tres ecuaciones e igualamos:

$$\frac{x-x_o}{a} = \frac{y-y_o}{b} = \frac{z-z_o}{c}$$

Ecuaciones simétricas de la recta que pasa el punto $P_o(x_o, y_o, z_o)$ y tiene vector director $\vec{u} = \langle a, b, c \rangle$

ECUACIONES SIMÉTRICAS DE LA RECTA

Ejemplos: Ecuaciones simétricas

1) Determinar las ecuaciones simétricas de la recta del ejemplo anterior.

2) ¿Se pueden obtener las ecuaciones simétricas del *eje y*?

Imagen
de 3dman_eu en Pixabay

RECTA QUE PASO POR DOS PUNTOS CONOCIDOS

¡Si conocemos dos puntos que están en la recta, también podríamos encontrar su ecuación!

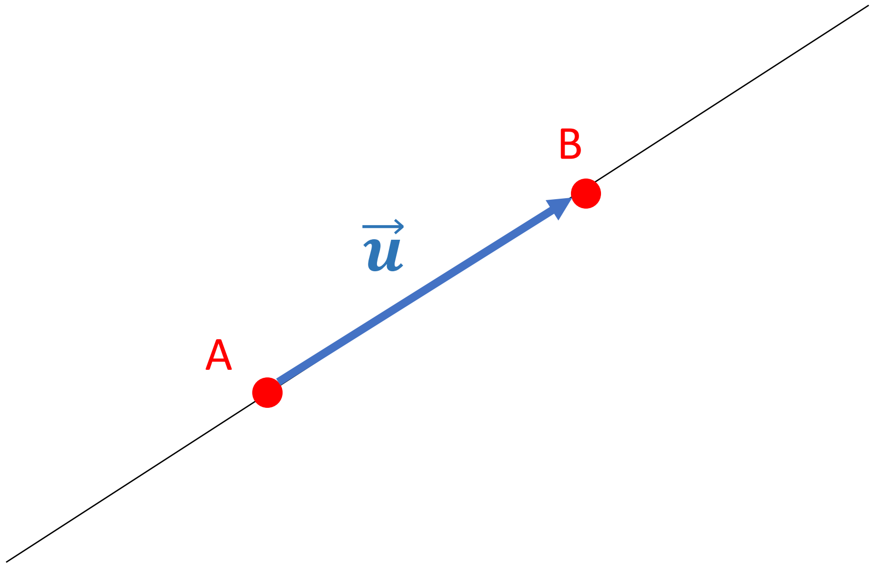
Imagen de 3dman_eu en Pixabay

¿Cómo sería?

Imagen de Peggy and Marco Lachmann-Anke en Pixabay

RECTA QUE PASO POR DOS PUNTOS CONOCIDOS

A y B dos puntos que están en la recta:



Entonces, un vector director a la recta es: $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$

¡Con cualquiera de los dos puntos y el vector director se puede determinar la ecuación de la recta que pasa por A y B!

RECTA QUE PASO POR DOS PUNTOS CONOCIDOS

Ejemplo: recta que pasa por dos puntos conocidos

Determinar las ecuaciones (vectorial, paramétricas y simétricas) de la recta que pasa por los puntos $A(5,-2,3)$ y $\mathrm{B}(-3,1,2)$

Imagen de 3dman_eu en Pixabay

ECUACIONES DE LA RECTA

Imagen de Peggy and Marco Lachmann-Anke en Pixabay

IMPORTANTE:

Para cualquiera de las ecuaciones de una recta (vectorial, paramétricas o simétricas) **se cumple**:

$P_1 \in L \iff$ verifica la/las ecuaciones cuando se reemplaza $\mathrm{P}(x, y, z)$ por P_1

Supongamos que tenemos la siguiente ecuación de una recta L_1

$$L_1: \begin{cases} x = 5 + 2t \\ y = 3 - 8t \\ z = -1 + 6t \end{cases} \quad t \in \mathcal{R}$$


Imagen de Peggy and Marco Lachmann-Anke en Pixabay

¿El punto $(2,3,-1)$ es un punto de la recta L_1?

Nos preguntamos, ¿se verifican estas ecuaciones?

$$\begin{cases} 2 = 5 + 2t \\ 3 = 3 - 8t \\ -1 = -1 + 6t \end{cases}$$

¡Reemplazamos las coordenadas del punto (2,3,-1) en x, y, z de las ecuaciones de la recta!

¡Resolvemos el sistema que nos queda!

En este caso....
¡COMO EL SISTEMA NO TIENE SOLUCIÓN!

CONCLUSIÓN

EL PUNTO $(2,3,-1)$ **NO PERTENECE** A LA RECTA DADA

Sigamos con la misma recta → $L_1 = \begin{cases} x = 5 + 2t \\ y = 3 - 8t \\ z = -1 + 6t \end{cases}$ $t \in \mathcal{R}$

Imagen de Peggy and Marco Lachmann-Anke en Pixabay

¿Cómo determinar un punto de la recta L_1?

¡¡¡Le doy un valor a t!!!

Supongamos que $t = 2$

Reemplazando en las ecuaciones de la recta: → $\begin{cases} x = 5 + 2.\boxed{2} \\ y = 3 - 8.\boxed{2} \\ z = -1 + 6.\boxed{2} \end{cases}$

Resolvemos

→ $\begin{cases} x = 9 \\ y = -13 \\ z = 11 \end{cases}$

<u>CONCLUSIÓN</u>

$(9, -13, 11)$ ES UN PUNTO DE LA RECTA DADA

¡¡¡Podría reemplazar a t por cualquier número real, y así obtener distintos puntos de la recta!!!

DIRECCIÓN RELATIVAS ENTRE RECTAS

Imagen de Peggy und Marco Lachmann-Anke en Pixabay

Veamos las direcciones relativas entre rectas en $\mathcal{R}^3$

PARALELAS

COINCIDENTES

PERPENDICULARES

OBLICUAS

DIRECCIÓN RELATIVAS ENTRE RECTAS

Imagen de Peggy and Marco Lachmann-Anke en Pixabay

En $\mathcal{R}^2$ para comparar las direcciones de dos rectas mirábamos las pendientes…

¿ENTONCES EN $\mathcal{R}^3$ CÓMO LO ESTUDIAMOS?

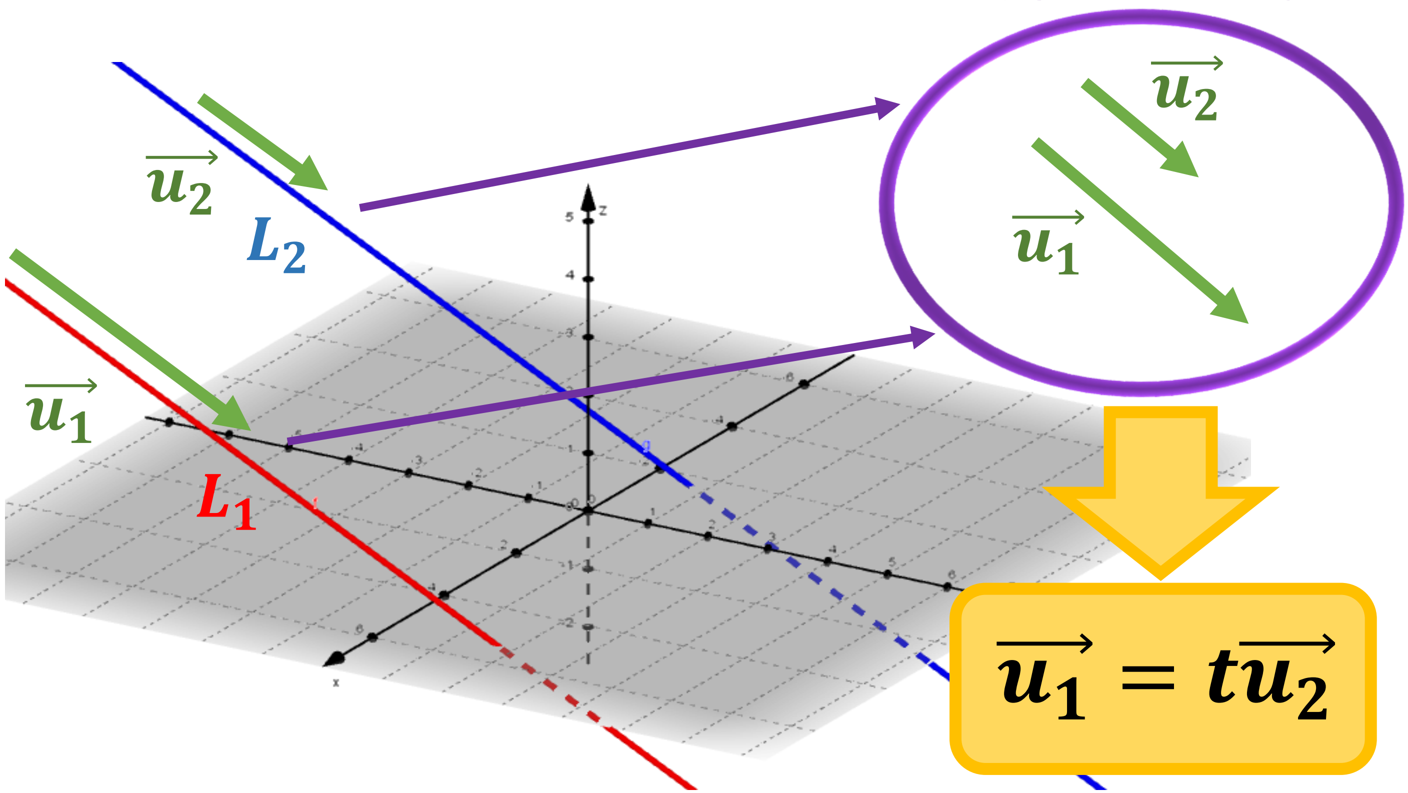
DIRECCIÓN RELATIVAS ENTRE RECTAS

RECTAS PARALELAS

VECTORES DIRECTORES COLINEALES

Observemos…

Imagen de Peggy und Marco Lachmann-Anke en Pixabay



$$\overrightarrow{u_1} = t\overrightarrow{u_2}$$

DIRECCIÓN RELATIVAS ENTRE RECTAS

RECTAS PARALELAS

Atención …

Imagen de Peggy und Marco Lachmann-Anke en Pixabay

IMPORTANTE: si se cumple que $\overrightarrow{u_1} = t\overrightarrow{u_2}$ las rectas tienen la ***misma dirección***, pero todavía queda definir si son ***la misma recta*** o **son *rectas paralelas***.

DIRECCIÓN RELATIVAS ENTRE RECTAS

RECTAS COINCIDENTES

¿Qué significa que las rectas sean coincidentes?

Esta foto de Autor desconocido está bajo licencia CC BY-NC-ND

¿Cómo nos damos cuenta si son coincidentes o paralelas

Imagen de Peggy and Marco Lachmann-Anke en Pixabay

DIRECCIÓN RELATIVAS ENTRE RECTAS

RECTAS PARALELAS → NINGÚN PUNTO EN COMÚN

RECTAS COINCIDENTES → TODOS LOS PUNTOS EN COMÚN

$$\overrightarrow{u_1} = t\overrightarrow{u_2}$$

VECTORES COLINEALES

Elegimos **un punto** de una de las rectas y nos fijamos si también pertenece a la otra...

¡SON LA MISMA RECTA!

DIRECCIÓN RELATIVAS ENTRE RECTAS

Ejemplo 1:

$$L_1: \begin{cases} x = \dfrac{1}{2} - 6t \\ y = 11 + 2t \\ z = -1 + 4t \end{cases} \qquad t \in \mathcal{R}$$

$$L_1: \begin{cases} x = 2 + 3h \\ y = -h \\ z = -7 - 2h \end{cases} \qquad h \in \mathcal{R}$$

¿Las rectas son paralelas?
¿Son coincidentes?

GeoGebra

DIRECCIÓN RELATIVAS ENTRE RECTAS

Ejemplo:

Determinar las ecuaciones (vectorial, paramétricas y simétricas) de la recta que pasa por el punto $P_o(-2,1,3)$ y es paralela al *eje y*.

Imagen de 3dman_eu en Pixabay

Verificar utilizando GeoGebra

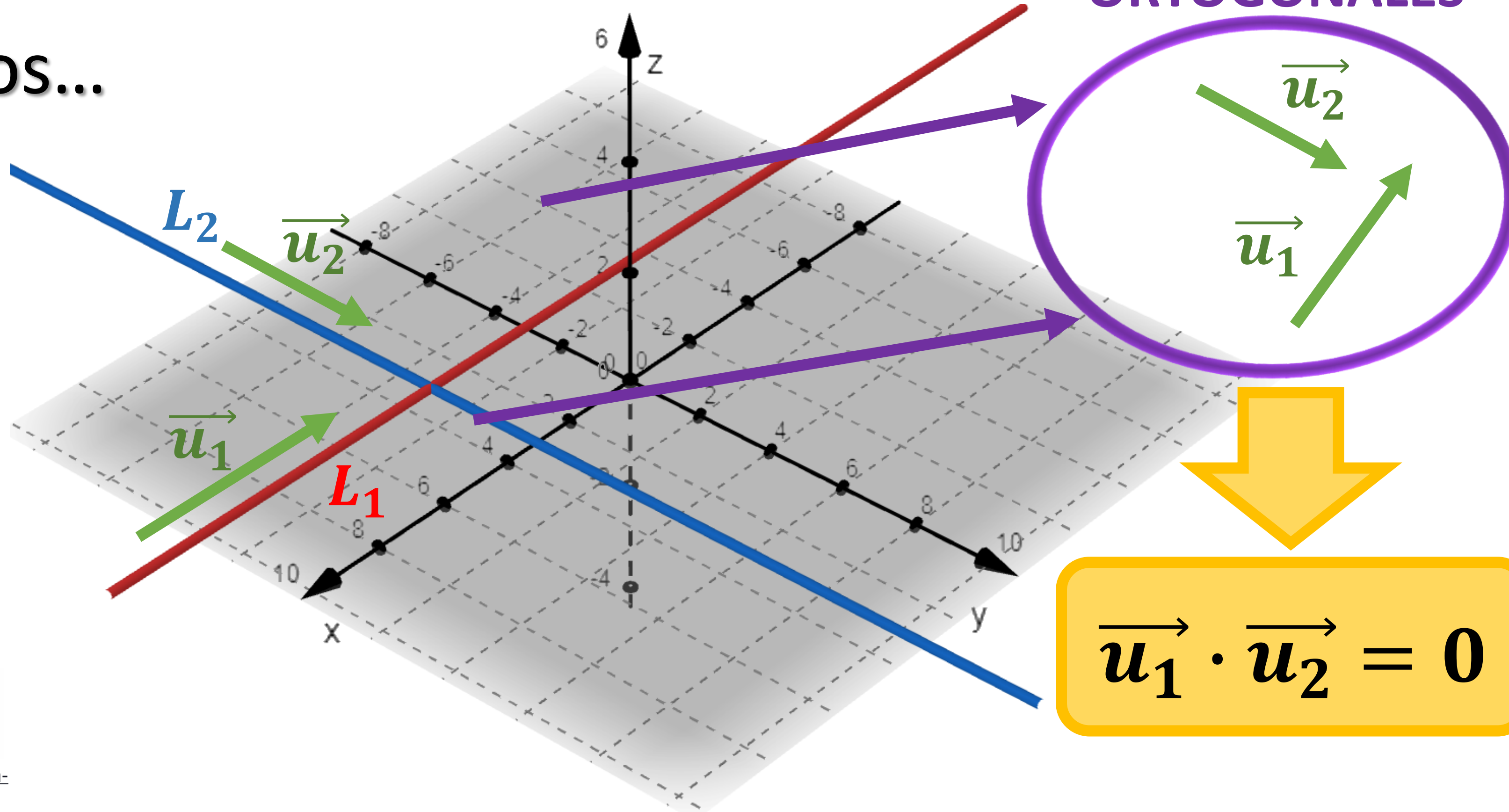
DIRECCIÓN RELATIVAS ENTRE RECTAS

RECTAS PERPENDICULARES

Observemos...

Imagen de Peggy und Marco Lachmann-Anke en Pixabay

VECTORES DIRECTORES ORTOGONALES



$$\overrightarrow{u_1} \cdot \overrightarrow{u_2} = 0$$

DIRECCIÓN RELATIVAS ENTRE RECTAS

RECTAS PARALELAS

RECTAS COINCIDENTES

$$\boxed{\overrightarrow{u_1} = t\overrightarrow{u_2}}$$

VECTORES COLINEALES

RECTAS PERPENDICULARES

$$\boxed{\overrightarrow{u_1} \cdot \overrightarrow{u_2} = 0}$$

VECTORES ORTOGONALES

DIRECCIÓN RELATIVAS ENTRE RECTAS

Ejemplo 2:

$$L_1: \begin{cases} x = 2 - 5t \\ y = 1 + 2t \\ z = 3 \end{cases} \qquad t \in \mathcal{R}$$

$$L_2: \begin{cases} x = 5h + 1 \\ y = 2h - 5 \\ z = h + 15 \end{cases} \qquad h \in \mathcal{R}$$

¿Las rectas son perpendiculares o no?

GeoGebra

DIRECCIÓN RELATIVAS ENTRE RECTAS

Ejemplo:

1) Encontrar una recta que sea perpendicular a la recta L_1 del ejemplo anterior y que pase por el punto $P_1(2,1,3)$.
¿Existe una sola recta que cumple estas condiciones?

Imagen de 3dman_eu en Pixabay

GeoGebra

Pueden utilizar el mismo applet que en el ejemplo 2

DIRECCIÓN RELATIVAS ENTRE RECTAS

RECTAS PARALELAS

RECTAS COINCIDENTES

$$\overrightarrow{u_1} = t\overrightarrow{u_2}$$

VECTORES COLINEALES

RECTAS PERPENDICULARES

$$\overrightarrow{u_1} \cdot \overrightarrow{u_2} = 0$$

VECTORES ORTOGONALES

RECTAS OBLICUAS

NO SON NI PARALELAS, NI COINCIDENTES NI PERPENDICULARES

DIRECCIÓN RELATIVAS ENTRE RECTAS

RECTAS PARALELAS

RECTAS COINCIDENTES

$$\overrightarrow{u_1} = t\overrightarrow{u_2}$$

VECTORES COLINEALES

RECTAS PERPENDICULARES

$$\overrightarrow{u_1} \cdot \overrightarrow{u_2} = 0$$

VECTORES ORTOGONALES

RECTAS OBLICUAS

$$\overrightarrow{u_1} \neq t\overrightarrow{u_2}$$
$$\overrightarrow{u_1} \cdot \overrightarrow{u_2} \neq 0$$

NO SON COLINEALES

NO SON ORTOGONALES

DIRECCIÓN RELATIVAS ENTRE RECTAS

Ejemplo 3:

Decidir si las siguientes rectas son paralelas, perpendiculares u oblicuas.

$$L_1\colon \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 1 - 2t \\ z = 1 + t \end{cases} \quad t \in \mathcal{R}$$

$$L_2\colon \frac{x-2}{-3} = \frac{y+3}{2} = z$$

Imagen de 3dman_eu en Pixabay

Corroborar utilizando GeoGebra

Matemática

Clase 15 – Martes 11 - 7

Facultad de Ciencias Agrarias y Forestales
UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PLATA

Cronograma

16	3-jul	Tema 9: Rectas y Planos en el espacio - Primera parte	Trabajo Práctico N°7: Rectas y planos en R3
17	10-jul	Tema 9: Rectas y Planos en el espacio - Segunda parte	Trabajo Práctico N°7: Rectas y planos en R3
		RECESO DE INVIERNO	
18	31-jul	Tema 9: Rectas y Planos en el espacio - Tercera parte	Trabajo Práctico N°7: Rectas y planos en R3

Imagen de Peggy und Marco Lachmann-Anke en Pixabay

RECTAS

¿Dónde?

$$\mathcal{R}^3$$

¿Qué vimos la clase pasada?

FCAyF Facultad de Ciencias Agrarias y Forestales

UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PLATA

REPASO DE VECTORES

I) $\vec{u}$ y $\vec{v}$ tienen **igual dirección** **(*colineales*)** $\Longleftrightarrow$ $\vec{u} = t\vec{v}\,;\quad t \in \mathcal{R}$

II) $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son **perpendiculares** **(*ortogonales*)** $\Longleftrightarrow$ $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

III) $\vec{u} \times \vec{v}$ da otro vector $\vec{w}$ que cumple: $\vec{w} \perp \vec{u} \ \wedge \ \vec{w} \perp \vec{u}$

($\vec{u}$ y $\vec{v}$ no colineales)

IV) Dados $\vec{u} = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle$ y $\vec{v} = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$

$\vec{u} = \vec{v}$ $\Longleftrightarrow$ $\begin{cases} u_1 = v_1 \\ u_2 = v_2 \\ u_3 = v_3 \end{cases}$

¿QUÉ VIMOS LA CLASE PASADA SOBRE RECTAS?

Para determinar la ecuación de L en $\mathcal{R}^3$ necesitamos:

- Un **punto** $\boldsymbol{P_O(x_o, y_o, z_o)} \in L$
- Un **vector** $\vec{u} = \langle a, b, c\rangle$ (vector director)

I) ***Ec. Vectorial de L:*** $\langle x - x_o, y - y_o, z - z_o\rangle = t\langle a, b, c\rangle \;;\; t \in \mathcal{R}$

II) ***Ec. Paramétricas de L:***
$$\begin{cases} x = ta + x_o \\ y = tb + y_o \\ z = tc + z_o \end{cases} \quad t \in \mathcal{R}$$

III) ***Ec. Simétricas de L:*** $a, b, c \neq 0$
$$\frac{x - x_o}{a} = \frac{y - y_o}{b} = \frac{z - z_o}{c}$$

INTERSECCIÓN ENTRE RECTAS

Vamos a ver cómo saber si dos rectas tienen intersección (se cortan)

INTERSECCIÓN ENTRE RECTAS

Imagen de Peggy and Marco Lachmann-Anke en Pixabay

EN $\mathcal{R}^2$, SI DOS RECTAS NO SON PARALELAS SABEMOS QUE SE CORTAN...

¿PASA LO MISMO CON DOS RECTAS EN $\mathcal{R}^3$?

Esta foto de Autor desconocido está bajo licencia CC BY-NC-ND

¿Y cómo determinamos si dos rectas en $\mathcal{R}^3$ se cortan o no?

¡¡Si las rectas son paralelas entonces NO se cortan, y si son coincidentes … son la misma recta!!

Imagen de 3dman_eu en Pixabay

¡¡Entonces podemos primero mirar los vectores directores!!

NO ENTIENDO…

Imagen de Peggy and Marco Lachmann-Anke en Pixabay

¡Lo vemos en un ejemplo!

Imagen de Peggy and Marco Lachmann-Anke en Pixabay

INTERSECCIÓN ENTRE RECTAS

Ejemplo 3: Intersección entre rectas

Supongamos que tenemos las siguientes ecuaciones de rectas:

$$L_1: \begin{cases} x = 5 + 2t \\ y = 3 - 8t \\ z = -1 + 6t \end{cases} \quad t \in \mathcal{R} \qquad L_2: \begin{cases} x = -2 + s \\ y = 2 - 4s \\ z = -1 + 3s \end{cases} \quad s \in \mathcal{R}$$

¿Existe la intersección entre las rectas? ¿Cómo me doy cuenta?

GeoGebra

Entonces, en $\mathcal{R}^3$ se sigue cumpliendo que si las rectas son paralelas… NO se CORTAN

Esta foto de Autor desconocido está bajo licencia CC BY-NC-ND

¡Si las rectas son coincidentes … son la misma recta, así que no tiene mucho sentido hablar de intersección en este caso…

Imagen de 3dman_eu en Pixabay

Pero… y las rectas que no son ni paralelas ni coincidentes… ¿sí o sí se van a cortar… como pasaba en $\mathcal{R}^2$?

¡Lo vemos en un ejemplo!

Imagen de Peggy and Marco Lachmann-Anke en Pixabay

GeoGebra

Imagen de Peggy und Marco Lachmann-Anke en Pixabay

Entonces… las rectas en $\mathcal{R}^3$ pueden ser…

PARALELAS

COINCIDENTES

SE CORTAN

ALABEADAS (NI PARALELAS, NI SE CORTAN)

INTERSECCIÓN ENTRE RECTAS

Dada $\boldsymbol{L_1}$ con vector director $\vec{\boldsymbol{u}}_1$ y $\boldsymbol{L_2}$ con vector director $\vec{\boldsymbol{u}}_2$, queremos saber si las rectas se cortan o no.

Lo primero que *conviene* hacer es …

Imagen de 3dman_eu en Pixabay

Corroborar que las rectas:

- No sean paralelas
- No sean coincidentes

$$\overrightarrow{\boldsymbol{u_1}} \neq \boldsymbol{t}\overrightarrow{\boldsymbol{u_2}}$$

INTERSECCIÓN ENTRE RECTAS

Dada $\boldsymbol{L_1}$ con vector director $\vec{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{1}}$ y $\boldsymbol{L_2}$ con vector director $\vec{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{2}}$, queremos saber si las rectas se cortan o no.

Si las rectas NO son paralelas ni coincidentes

Si se cortan en un punto, entonces ese punto pertenece a las dos rectas

$\Downarrow$

Sistema de ecuaciones lineales

¡El punto verifica las ecuaciones de las dos rectas!

Imagen de 3dman_eu en Pixabay

INTERSECCIÓN ENTRE RECTAS

Dadas:

$$L_1: \begin{cases} x = ta_1 + x_1 \\ y = tb_1 + y_1 \\ z = tc_1 + z_1 \end{cases} \qquad L_2: \begin{cases} x = ha_2 + x_2 \\ y = hb_2 + y_2 \\ z = hc_2 + z_2 \end{cases} \qquad \begin{matrix} t \in \mathcal{R} \\ h \in \mathcal{R} \end{matrix}$$

Igualamos las coordenadas (x, y, z) de L_1 y L_2 y reordenamos:

Sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} ta_1 - ha_2 = -x_1 + x_2 \\ tb_1 - hb_2 = -y_1 + y_2 \\ tc_1 - hc_2 = -z_1 + z_2 \end{cases}$$

t y h son las incógnitas del sistema

INTERSECCIÓN ENTRE RECTAS

Ejemplo 4: Intersección entre rectas

Decidir si las siguientes rectas se cortan o no. Si se cortan encontrar la intersección.

$$L_1: \begin{cases} x = 5 - 6t \\ y = 1 + 2t \\ z = -1 + 4t \end{cases} \quad t \in \mathcal{R} \qquad L_2: \begin{cases} x = 3h - 4 \\ y = -3h \\ z = 1 - 2h \end{cases} \quad h \in \mathcal{R}$$

Imagen de 3dman_eu en Pixabay

GeoGebra

INTERSECCIÓN ENTRE RECTAS

Primero verificamos que no tengan la misma dirección (rectas paralelas o coincidentes).

Luego igualamos las rectas para ver si se cortan, entonces se genera un sistema de ecuaciones lineales: si el sistema que se origina tiene solución entonces las rectas se cortan.

$$\begin{cases} 5-6t=3h-4 \\ 1+2t=-3h \\ -1+4t=1-2h \end{cases}$$

SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES

REORDENAMOS EL SISTEMA

$$\begin{cases} 6t-3h=1 \\ 2t+3h=-1 \\ 4t+2h=2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6t - 3h = 1 \\ 2t + 3h = -1 \\ 4t + 2h = 2 \end{cases}$$

Sistema de 3 ecuaciones y 2 incógnitas

¡¡¡Analicemos el sistema!!!

Entonces concluimos…

Como el rango de A (matriz asociada al sistema) es distinto al rango de A* (matriz ampliada del sistema), entonces (por R-F) el sistema NO tiene solución.

¡¡¡Entonces las rectas NO se cortan!!!

Las rectas son alabeadas

INTERSECCIÓN ENTRE RECTAS

Ejemplo 5: Intersección entre rectas

Decidir si las siguientes rectas se cortan o no. Si se cortan encontrar la intersección.

$$L_1: \begin{cases} x = 5 + 2t \\ y = 3 - 8t \\ z = -1 + 6t \end{cases} \quad t \in \mathcal{R} \qquad L_2: \begin{cases} x = -2 + s \\ y = 15 - 4s \\ z = -5 + 2s \end{cases} \quad s \in \mathcal{R}$$


Imagen de 3dman_eu en Pixabay

GeoGebra

INTERSECCIÓN ENTRE RECTAS

Primero verificamos que no tengan la misma dirección (rectas paralelas o coincidentes).

¡Igualamos las rectas para ver si se cortan... se genera un sistema de ecuaciones lineales... si el sistema que se origina tiene solución ... entonces las rectas se cortan!

$$\begin{cases} 5+2t=-2+s \\ 3-8t=15-4s \\ -1+6t=-5+2s \end{cases}$$

SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES

REORDENAMOS EL SISTEMA

$$\begin{cases} 2t-s=-7 \\ -8t+4s=12 \\ 6t-2s=-4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2t - s = -7 \\ -8t + 4s = 12 \\ 6t - 2s = -4 \end{cases}$$

Sistema de 3 ecuaciones y 2 incógnitas

¡¡¡Analicemos el sistema!!!

Entonces concluimos…

Como el rango de A (matriz asociada al sistema) es igual al rango de A* (matriz ampliada del sistema) y son iguales a 2, que es el número de incógnitas, entonces (por R-F) el sistema tiene solución única.

¡¡¡Entonces las rectas se cortan en un punto!!!

Para saber en qué punto, resuelven el sistema por algún método y así determinan el punto de intersección de las rectas.

A pensar…

Si el sistema tiene infinitas soluciones, ¿qué significado tiene con respecto a las rectas?

Si no tiene solución, ¿qué significado tiene con respecto a las rectas?

INTERSECCIÓN ENTRE RECTAS – RESUMIENDO...

RECTAS PARALELAS → NINGÚN PUNTO EN COMÚN

$$\overrightarrow{u_1} = t\overrightarrow{u_2}$$

VECTORES COLINEALES

RECTAS COINCIDENTES → **TODOS** LOS PUNTOS EN COMÚN

Elegimos **un punto** de una de las rectas y nos fijamos si también pertenece a la otra…

¡SON LA MISMA RECTA!

INTERSECCIÓN ENTRE RECTAS – RESUMIENDO…

RECTAS PARALELAS → **NINGÚN** PUNTO EN COMÚN

RECTAS COINCIDENTES → **TODOS** LOS PUNTOS EN COMÚN

$$\overrightarrow{u_1} = t\overrightarrow{u_2}$$

VECTORES COLINEALES

RECTAS ALABEADAS → **NINGÚN** PUNTO EN COMÚN

RECTAS QUE SE CORTAN → **UN SOLO** PUNTO EN COMÚN

Imagen de 3dman_eu en Pixabay

Ejemplos:

1) Determinar si la recta que pasa por el punto $A(1,-2,3)$ y tiene vector director $\vec{u} = \langle 4,2,-3 \rangle$ y la recta de ecuación: $\langle x,y,z \rangle = \langle 3,5,-2 \rangle t + \langle 2,-1,4 \rangle$ se cortan o no. Si no se cortan indicar por qué.

2) Determinar si la recta $\boldsymbol{L_1}$ que pasa por los puntos $A(-2,2,4)$ y $\mathrm{B}(1,-3,2)$ y la recta $\boldsymbol{L_2}$ Si no se cortan indicar por qué.

$$\boldsymbol{L_2}: \frac{x-1}{6} = \frac{y+3}{-10} = \frac{z-4}{-4}$$

GeoGebra

Imagen de Peggy and Marco Lachmann-Anke en Pixabay

Hoy vamos a ver planos…
¡Su gráfica y su ecuación!

Veamos…

Para determinar la ecuación de un plano en $\mathcal{R}^3$

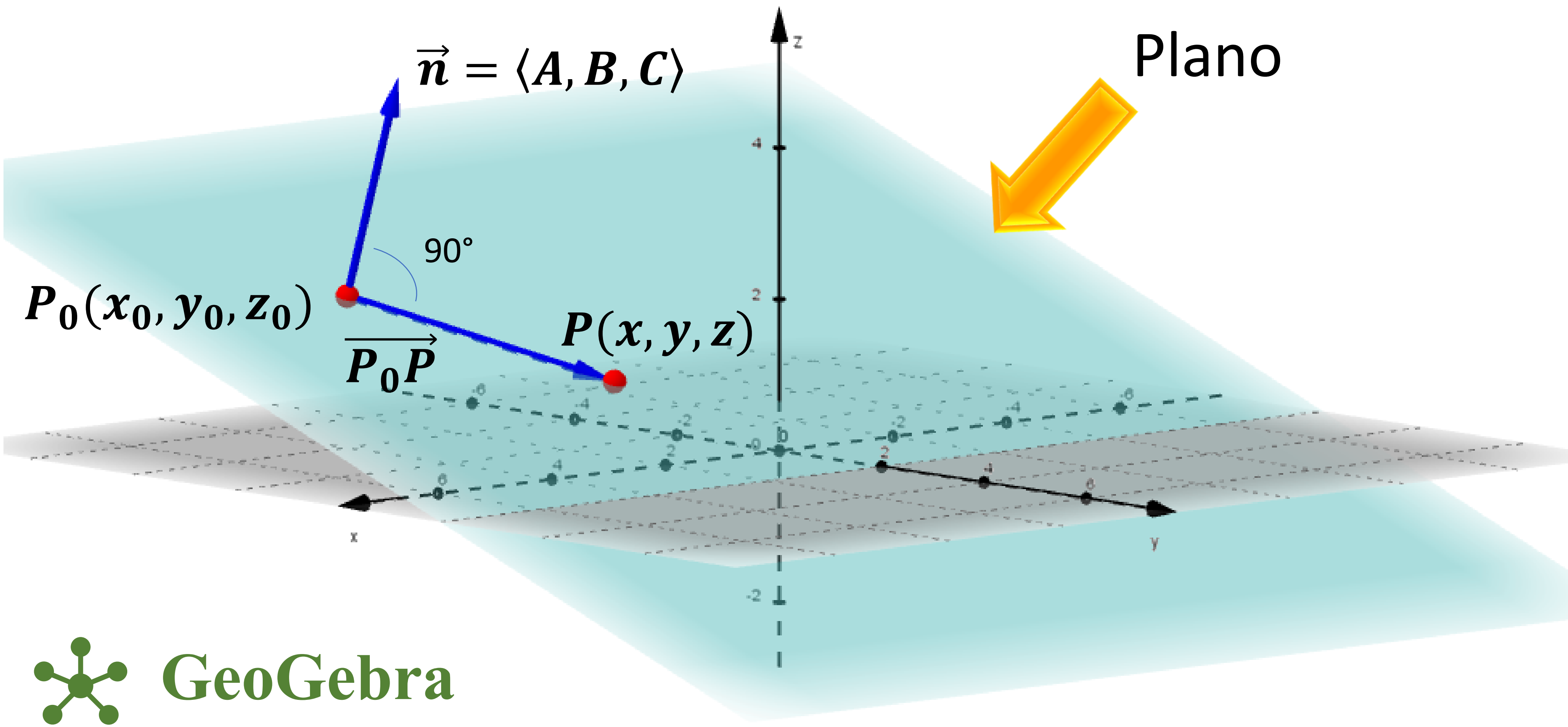
Se necesita …

- Un **punto** del plano: $\boldsymbol{P_O(x_o, y_o, z_o)}$.
- Un **vector** que sea la *perpendicular* al plano:

$\vec{n} = \langle A, B, C \rangle$

Vector Normal

Si P ∈ al plano… **¿Qué deben cumplir $\overrightarrow{P_oP}$ y $\vec{n}$?**



Entonces…

Supongamos que tenemos un plano llamado $\boldsymbol{\pi}$:

- $\vec{n}$ **un vector perpendicular** al plano.
- P_0 **un punto** que está en el plano.

Si P es un punto genérico:

$\boldsymbol{P \in \pi \Leftrightarrow \overrightarrow{P_oP}}$ y $\boldsymbol{\vec{n}}$ **son ortogonales** $\Rightarrow$ $\boldsymbol{\vec{n} \cdot \overrightarrow{P_0P} = 0}$

$\boldsymbol{P \notin \pi \Leftrightarrow \overrightarrow{P_oP}}$ y $\boldsymbol{\vec{n}}$ **NO son ortogonales** $\Rightarrow$ $\boldsymbol{\vec{n} \cdot \overrightarrow{P_0P} \neq 0}$

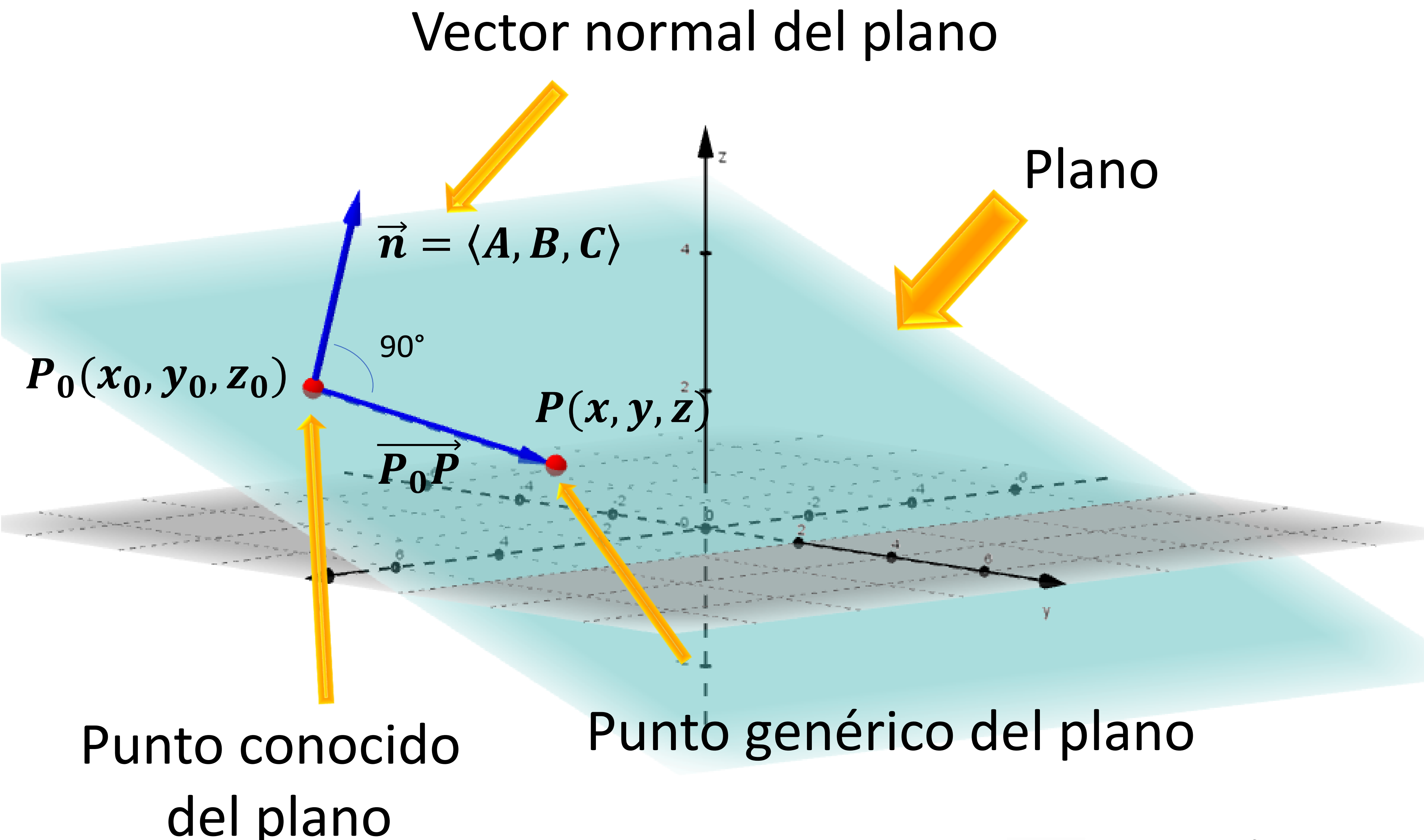
ECUACIÓN VECTORIAL DEL PLANO

Si $\vec{n} = \langle A, B, C \rangle$ es el vector normal del plano $\boldsymbol{\pi}$ y $P_o(x_o, y_o, z_o)$ es un punto conocido de $\boldsymbol{\pi}$, entonces $P(x, y, z)$ pertenece a $\boldsymbol{\pi}$, sí y solo sí se cumple la siguiente igualdad:

$$\vec{\boldsymbol{n}} \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{P_0 P}} = \boldsymbol{0}$$

$$\langle A, B, C \rangle \cdot \langle x - x_o, y - y_o, z - z_o \rangle = 0$$

Ecuación vectorial del plano que pasa por el **punto** P_0 y tiene **vector normal** $\vec{n}$


Vector normal del plano
Plano
$\vec{n} = \langle A, B, C \rangle$
90°
$P_0(x_0, y_0, z_0)$
$P(x, y, z)$
$\overrightarrow{P_0P}$
z
y
Punto conocido
del plano
Punto genérico del plano

ECUACIÓN CARTESIANA DEL PLANO

A partir de la ecuación vectorial:

$$\langle A, B, C \rangle \cdot \langle x - x_o, y - y_o, z - z_o \rangle = 0$$

Realizando el producto escalar obtenemos:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

Ecuación cartesiana del plano que pasa por el **punto** P_0 y tiene **vector normal** $\vec{n}$

Observemos...

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

Haciendo las operaciones correspondientes, llamando $\mathrm{D} = -(Ax_0 + By_0 + Cz_0)$, llegamos a la siguiente ecuación:

Imagen de Peggy und Marco Lachmann-Anke en Pixabay

$$\boxed{A}x + \boxed{B}y + \boxed{C}z + D = 0$$

Componentes del **vector normal** del plano

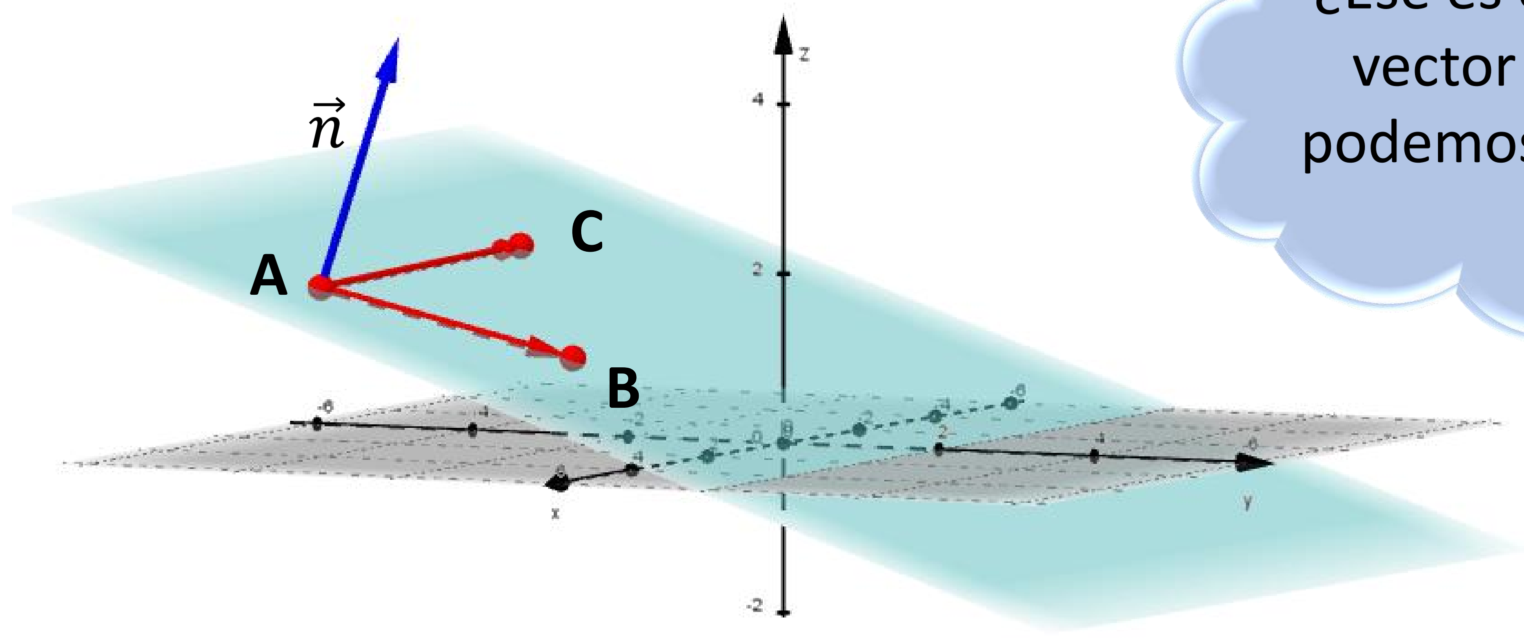
Si conocemos tres puntos que están en el plano, ¡¡también podríamos encontrar la ecuación del mismo!!

Imagen de 3dman_eu en Pixabay

¿Cómo sería?

Imagen de Peggy and Marco Lachmann-Anke en Pixabay

A, B y C tres puntos que están en el plano



Entonces, un vector normal al plano es: $\vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$

Imagen de Peggy and Marco Lachmann-Anke en Pixabay

¡Con cualquiera de los tres puntos y el vector normal se puede determinar la ecuación!

Ejemplos:

1) Determinar la ecuación del plano coordenado $\boldsymbol{xy}$.

2) Si $2x + 3y - 5z = 4$ es la ecuación de un plano, ¿cuál es el vector normal del mismo? ¿El punto $(3, -1, 1)$ pertenece al plano?

3) Determinar la ecuación del plano que pasa por los puntos $P_1(0,4,-1)$, $P_2(1,-1,2)$ y $P_3(2,-3,5)$.

Imagen de 3dman_eu en Pixabay

GeoGebra (Ejemplo 3)

ECUACIONES DEL PLANO

Imagen de Peggy und Marco Lachmann-Anke en Pixabay

IMPORTANTE:

Para cualquiera de las ecuaciones de un plano (vectorial o cartesiana) **se cumple**:

$P_1 \in \pi \iff$ verifica la ecuación cuando se reemplaza $\mathrm{P}(x, y, z)$ por P_1

DIRECCIÓN RELATIVAS ENTRE PLANOS

Imagen de Peggy und Marco Lachmann-Anke en Pixabay

PARALELOS

PERPENDICULARES

OBLICUOS

Los planos pueden ser...

¿Y cómo determinamos si dos planos son paralelos, perpendiculares u oblicuos?

¡Usando los vectores normales … !

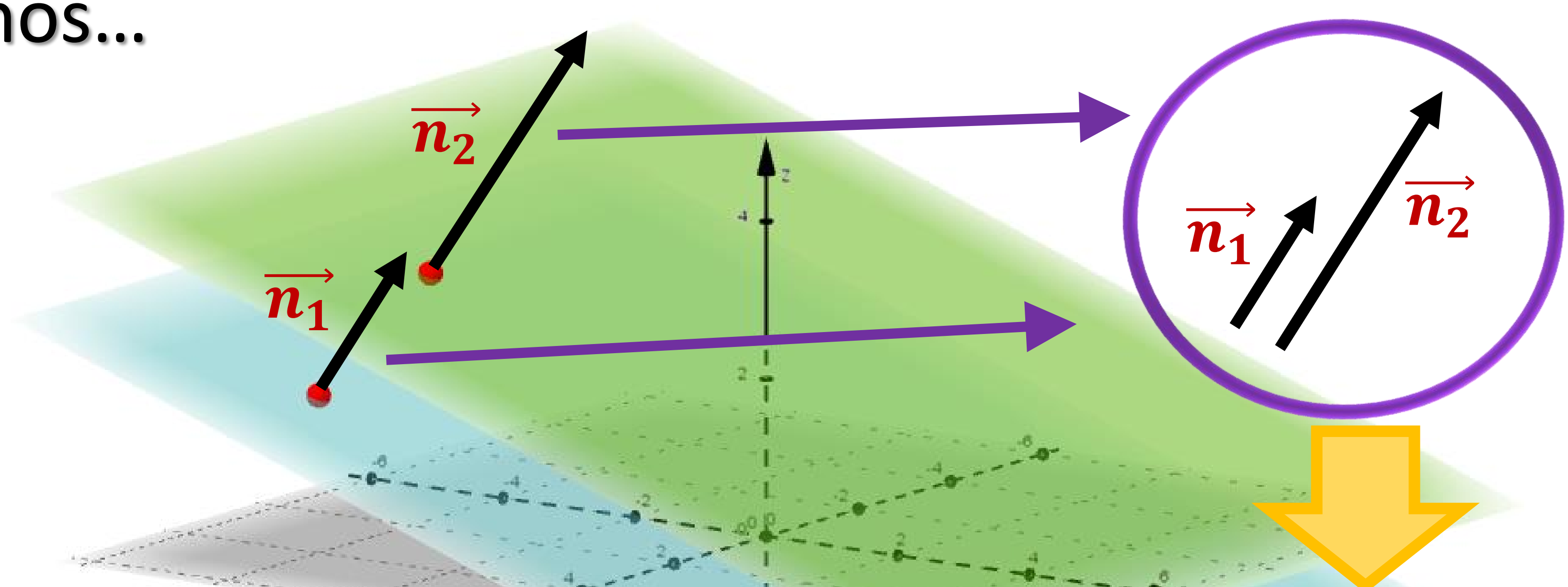
DIRECCIÓN RELATIVAS ENTRE RECTAS

PLANOS PARALELOS

VECTORES NORMALES COLINEALES

Observemos…

Imagen de Peggy und Marco Lachmann-Anke en Pixabay



$$\overrightarrow{n_1} = t\overrightarrow{n_2}$$

DIRECCIÓN RELATIVAS ENTRE PLANOS

PALNOS PARALELOS

Atención …

Imagen de Peggy und Marco Lachmann-Anke en Pixabay

IMPORTANTE: si se cumple que $\overrightarrow{n_1} = t\overrightarrow{n_2}$ los planos tienen la ***misma dirección***, pero todavía queda definir si son ***el mismo plano*** o **son *planos paralelos***.

Entonces...

Imagen de Peggy and Marco Lachmann-Anke en Pixabay

SI LOS VECTORES NORMALES SON COLINEALES LOS PLANOS SON PARALELOS O SON COINCIDENTES

Ejemplos:

Decidir si los siguientes pares de planos son coincidentes, paralelos o ninguna:

1) $\pi_1: \ 2x - 3y + 5z = 2 \, , \pi_2: -4x + 6y - 10z = -4$

2) $\pi_1: x - 3y + 6z - 2 = 0 \, , \pi_2: -\frac{1}{3}x + y - 2z = -\frac{2}{3}$

3) $\pi_1: 2x - 3y + 5z = 2 \, , \pi_2: 3x + 4y - 2z = 1$

Imagen de 3dman_eu en Pixabay

GeoGebra (Ejemplo 2)

¿Y si los planos son perpendiculares, cómo nos damos cuenta?

¿Uso el producto punto entre los vectores normales?

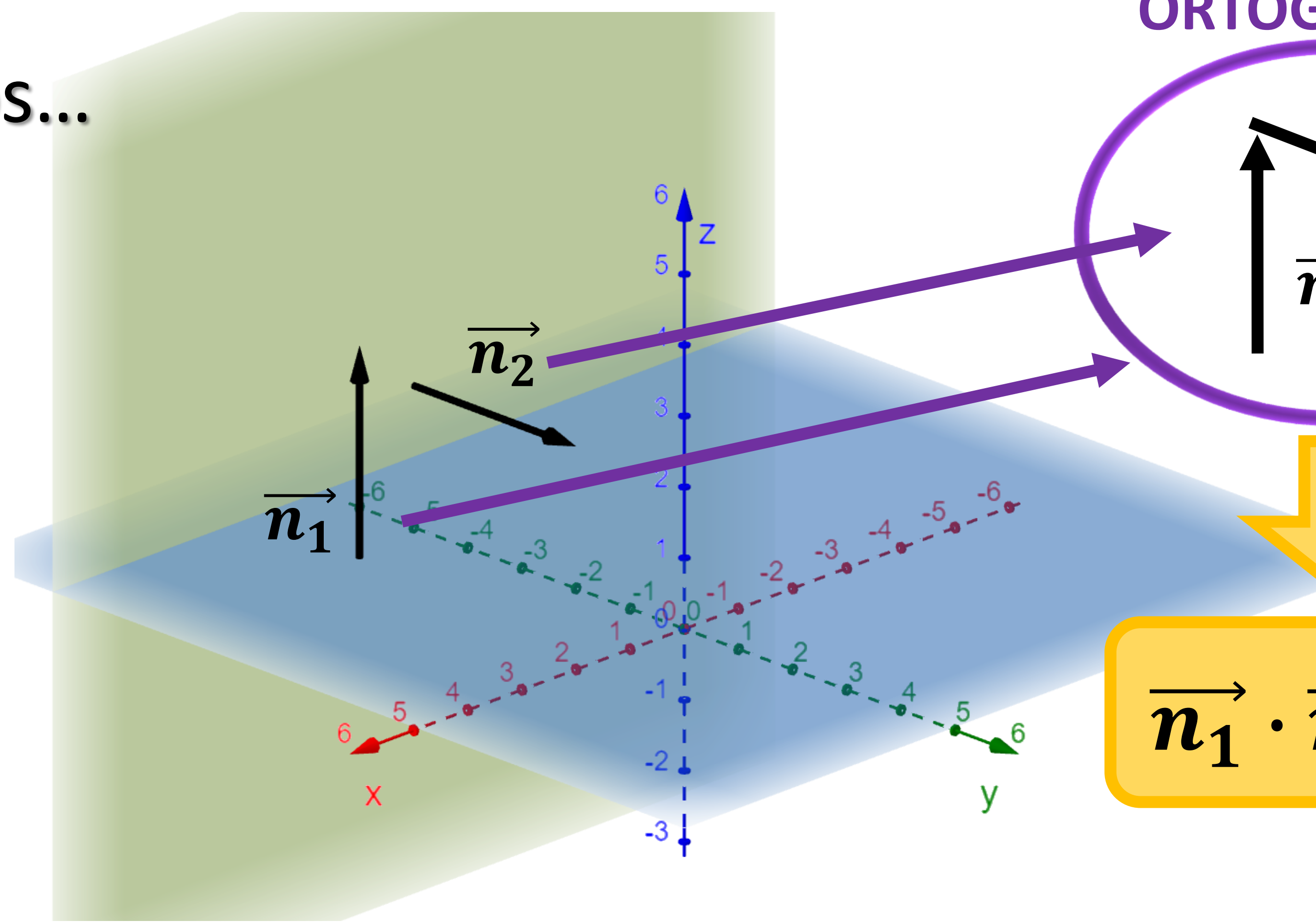
¡Si los vectores normales son perpendiculares entonces los planos son perpendiculares!

DIRECCIÓN RELATIVAS ENTRE PLANOS

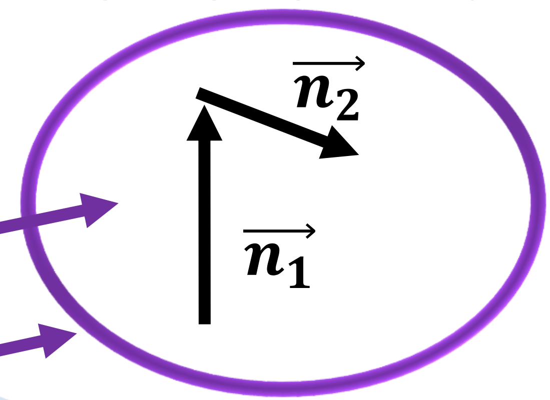
PLANOS PERPENDICULARES

Observemos…

Imagen de Peggy und Marco Lachmann-Anke en Pixabay



VECTORES NORMALES ORTOGONALES



$$\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}=0$$

Ejemplo:

Decidir si los siguientes planos del ejemplo 3 que hicimos antes son perpendiculares:

$$\pi_1: 2x - 3y + 5z = 2\ ,\ \pi_2: 3x + 4y - 2z = 1$$

Imagen de 3dman_eu en Pixabay

DIRECCIONES RELATIVAS ENTRE PLANOS

¿HACEMOS UN RESUMEN DE LO QUE VIMOS HASTA ACÁ?

Imagen de Peggy and Marco Lachmann-Anke en Pixabay

DIRECCIÓN RELATIVAS ENTRE PLANOS

PLANOS PARALELOS

PLANOS COINCIDENTES

$$\overrightarrow{n_1} = t\overrightarrow{n_2}$$

VECTORES COLINEALES

PLANOS PERPENDICULARES

$$\overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{n_2} = 0$$

VECTORES ORTOGONALES

PLANOS OBLICUOS

NO SON NI PARALELOS, NI COINCIDENTES NI PERPENDICULARES

DIRECCIÓN RELATIVAS ENTRE PLANOS

PLANOS PARALELOS

PLANOS COINCIDENTES

$$\overrightarrow{n_1} = t\overrightarrow{n_2}$$

VECTORES COLINEALES

PLANOS PERPENDICULARES

$$\overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{n_2} = 0$$

VECTORES ORTOGONALES

PLANOS OBLICUOS

$$\overrightarrow{n_1} \neq t\overrightarrow{n_2}$$
$$\overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{n_2} \neq 0$$

NO SON COLINEALES

NO SON ORTOGONALES

INTERSECCIÓN ENTRE PLANOS

Vamos a ver cómo saber si dos planos tienen intersección (se cortan)

INTERSECCIÓN ENTRE PLANOS

Esta foto de Autor desconocido está bajo licencia CC BY-NC-ND

Si dos planos no son paralelos entonces se cortan… pero ¿en qué se cortan? ¿cómo puedo verlo?

Imagen de Peggy und Marco Lachmann-Anke en Pixabay

¡Con sistemas de ecuaciones!

INTERSECCIÓN ENTRE PLANOS

Dado $\boldsymbol{\pi_1}$ con vector normal $\vec{\boldsymbol{n}}_1$ y $\boldsymbol{\pi_2}$ con vector normal $\vec{\boldsymbol{n}}_2$, queremos saber si los planos se cortan o no.

Imagen de 3dman_eu en Pixabay

Lo primero que *conviene* hacer es …

Corroborar que los planos:

- No sean paralelos
- No sean coincidentes

$$\overrightarrow{\boldsymbol{n_1}} \neq \boldsymbol{t}\overrightarrow{\boldsymbol{n_2}}$$

¡Porque si son paralelos no se cortan! Y si son coincidentes es un mismo plano

INTERSECCIÓN ENTRE PLANOS

Dado $\boldsymbol{\pi_1}$ con vector normal $\vec{\boldsymbol{n}}_1$ y $\boldsymbol{\pi_2}$ con vector normal $\vec{\boldsymbol{n}}_2$, queremos saber si los planos se cortan o no.

Si los planos NO son paralelos ni coincidentes

Los planos se cortan en una recta

Sistema de ecuaciones lineales

¡Los puntos de la recta verifican las ecuaciones de los dos planos!

Imagen de 3dman_eu en Pixabay

INTERSECCIÓN ENTRE PLANOS

Dados: $\pi_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \;\; ; \;\; \pi_1 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$

Los puntos $P(x, y, z)$ que pertenezcan a la intersección deben cumplir las ecuaciones de los dos planos…

A pensar:

¿Cuántas soluciones tendrá este sistema?

Sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \\ x = t \end{cases}$$

Imagen de Peggy and Marco Lachmann-Anke en Pixabay

INTERSECCIÓN ENTRE PLANOS

Observemos...

Imagen de Peggy und Marco Lachmann-Anke en Pixabay

Dados:

$$\pi_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \;\; ; \;\; \pi_1 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

Primero: Corroboramos que nos sean paralelos ni coincidentes

$$\overrightarrow{n_1} \neq t\overrightarrow{n_2}$$

Después: Armamos el sistema lineal para encontrar la intersección

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

Si usáramos Rouché-Frobenius... ¿Cuántas soluciones nos daría que tiene el sistema?

Ejemplo:

Ya vimos que estos planos no son paralelos, entonces se cortan:

$$2x - 3y + 5z = 2$$

$$3x + 4y - 2z = 1$$

Busquemos cómo es la ecuación de la recta en la cual se cortan.

Planteamos un sistema de ecuaciones entre las dos ecuaciones de los planos y lo resolvemos…

$$\begin{cases} 2x - 3y + 5z = 2 \\ 3x + 4y - 2z = 1 \end{cases}$$

Imagen de 3dman_eu en Pixabay

¡Resolvamos el sistema!

Ejemplo:

Determinar si los siguientes planos se cortan y en tal caso encontrar la intersección:

$$\Pi_1 : \; x - 3y + 6z - 2 = 0 \qquad \Pi_2 : \; -x - 3y + z - 1 = 0$$

Imagen de 3dman_eu en Pixabay

GeoGebra

Para ir terminando…

Determinar si el plano que pasa por el punto $P_0(4,-1,3)$ y vector normal igual a $\vec{n} = \langle 2,3,-1 \rangle$ y el plano de ecuación $x - 3y + 4z = -1$ se cortan.

a) Si no se cortan decidir si son paralelos o coincidentes.

b) Si se cortan, encontrar la intersección.

Imagen
de 3dman_eu en Pixabay

Determinar si el plano de ecuación $2x + 3y - 5z = 4$ y el plano que pasa por los puntos $A(1,-2,4)$, $B(4,5,-1)$ y C$(-2,3,1)$ se cortan.

a) Si no se cortan, decidir si son paralelos o coincidentes.

b) Si se cortan, encontrar la intersección.

Matemática

Clase 16 – Martes 1 - 8

Facultad de Ciencias Agrarias y Forestales
UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PLATA

Cronograma

16	3-jul	Tema 9: Rectas y Planos en el espacio - Primera parte	Trabajo Práctico N°7: Rectas y planos en R3
17	10-jul	Tema 9: Rectas y Planos en el espacio - Segunda parte	Trabajo Práctico N°7: Rectas y planos en R3
		RECESO DE INVIERNO	
18	31-jul	Tema 9: Rectas y Planos en el espacio - Tercera parte	Trabajo Práctico N°7: Rectas y planos en R3

Imagen de Peggy und Marco Lachmann-Anke en Pixabay

RECTAS Y PLANOS

¿Dónde?

$$\mathcal{R}^3$$

Recordamos lo que vimos las últimas dos clases antes del receso invernal...

REPASO DE RECTAS EN EL ESPACIO

Si tenemos:

- $\vec{u} = \langle a, b, c \rangle$ **un vector que dirige** la recta.
- $P_O(x_o, y_o, z_o)$ **un punto** que está en la recta.
- $P(x, y, z)$ **un punto genérico** de la recta.

Ecuación vectorial

$$\overrightarrow{P_oP} = t\vec{u} \quad (t \in \mathcal{R})$$

$$\langle x - x_o, y - y_o, z - z_o \rangle = t\langle a, b, c \rangle \; ; \; t \in \mathcal{R}$$

Ecuaciones paramétricas

$$\begin{cases} x = ta + x_o \\ y = tb + y_o \\ z = tc + z_o \end{cases} \quad t \in \mathcal{R}$$

Ecuaciones simétricas

$$\frac{x - x_o}{a} = \frac{y - y_o}{b} = \frac{z - z_o}{c}$$

DIRECCIÓN RELATIVA ENTRE RECTAS

RECTAS PARALELAS

RECTAS COINCIDENTES

$$\overrightarrow{u_1} = t\overrightarrow{u_2}$$

VECTORES COLINEALES

RECTAS PERPENDICULARES

$$\overrightarrow{u_1} \cdot \overrightarrow{u_2} = 0$$

VECTORES ORTOGONALES

RECTAS OBLICUAS

NO SON NI PARALELAS, NI COINCIDENTES NI PERPENDICULARES

DIRECCIÓN RELATIVA ENTRE RECTAS

RECTAS PARALELAS

RECTAS COINCIDENTES

$$\overrightarrow{u_1} = t\overrightarrow{u_2}$$

VECTORES COLINEALES

RECTAS PERPENDICULARES

$$\overrightarrow{u_1} \cdot \overrightarrow{u_2} = 0$$

VECTORES ORTOGONALES

RECTAS OBLICUAS

$$\overrightarrow{u_1} \neq t\overrightarrow{u_2}$$
$$\overrightarrow{u_1} \cdot \overrightarrow{u_2} \neq 0$$

NO SON COLINEALES

NO SON ORTOGONALES

INTERSECCIÓN DE RECTAS

Dos rectas en el espacio pueden ser…

Paralelas / Coincidentes

Se cortan en un punto

Alabeadas
(no se cortan ni son paralelas)

Los vectores directores son colineales

Los vectores directores NO son colineales

Sistema de ecuaciones lineales

REPASO DE PLANOS EN EL ESPACIO

Si tenemos:

- $\vec{n} = \langle A, B, C \rangle$ **un vector perpendicular** al plano.
- $P_0(x_0, y_0, z_0)$ **un punto** que está en el plano.
- $P(x, y, z)$ **un punto genérico** del plano.

Ecuación vectorial	$\vec{n} \cdot \overrightarrow{P_0P} = 0$ $\langle A, B, C \rangle \cdot \langle x - x_o, y - y_o, z - z_o \rangle = 0$

Ecuación cartesiana	$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$

DIRECCIÓN RELATIVAS ENTRE PLANOS

PLANOS PARALELOS

PLANOS COINCIDENTES

$$\overrightarrow{n_1} = t\overrightarrow{n_2}$$

VECTORES COLINEALES

PLANOS PERPENDICULARES

$$\overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{n_2} = 0$$

VECTORES ORTOGONALES

PLANOS OBLICUOS

NO SON NI PARALELOS, NI COINCIDENTES NI PERPENDICULARES

DIRECCIÓN RELATIVAS ENTRE PLANOS

PLANOS PARALELOS PLANOS COINCIDENTES	$\overrightarrow{n_1} = t\overrightarrow{n_2}$	VECTORES COLINEALES
PLANOS PERPENDICULARES	$\overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{n_2} = 0$	VECTORES ORTOGONALES
PLANOS OBLICUOS	$\overrightarrow{n_1} \neq t\overrightarrow{n_2}$ $\overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{n_2} \neq 0$	NO SON COLINEALES NO SON ORTOGONALES

INTERSECCIÓN DE PLANOS

Dos planos en el espacio pueden ser…

Paralelos / Coincidentes

Los vectores normales son colineales

Se cortan en una recta

Los vectores normales NO son colineales

Sistema de ecuaciones lineales

Imagen de Peggy und Marco Lachmann-Anke en Pixabay

RELACIONES ENTRE RECTAS Y PLANOS

¿Qué vamos a ver hoy?

Imagen de Peggy und Marco Lachmann-Anke en Pixabay

Dada la recta L y el plano π
Entonces …

L PUEDE ESTAR CONTENIDA EN UN PLANO PARALELO A π

L PUEDE ESTAR CONTENIDA EN EL PLANO π

L PUEDE SER PERPENDICULAR AL PLANO π

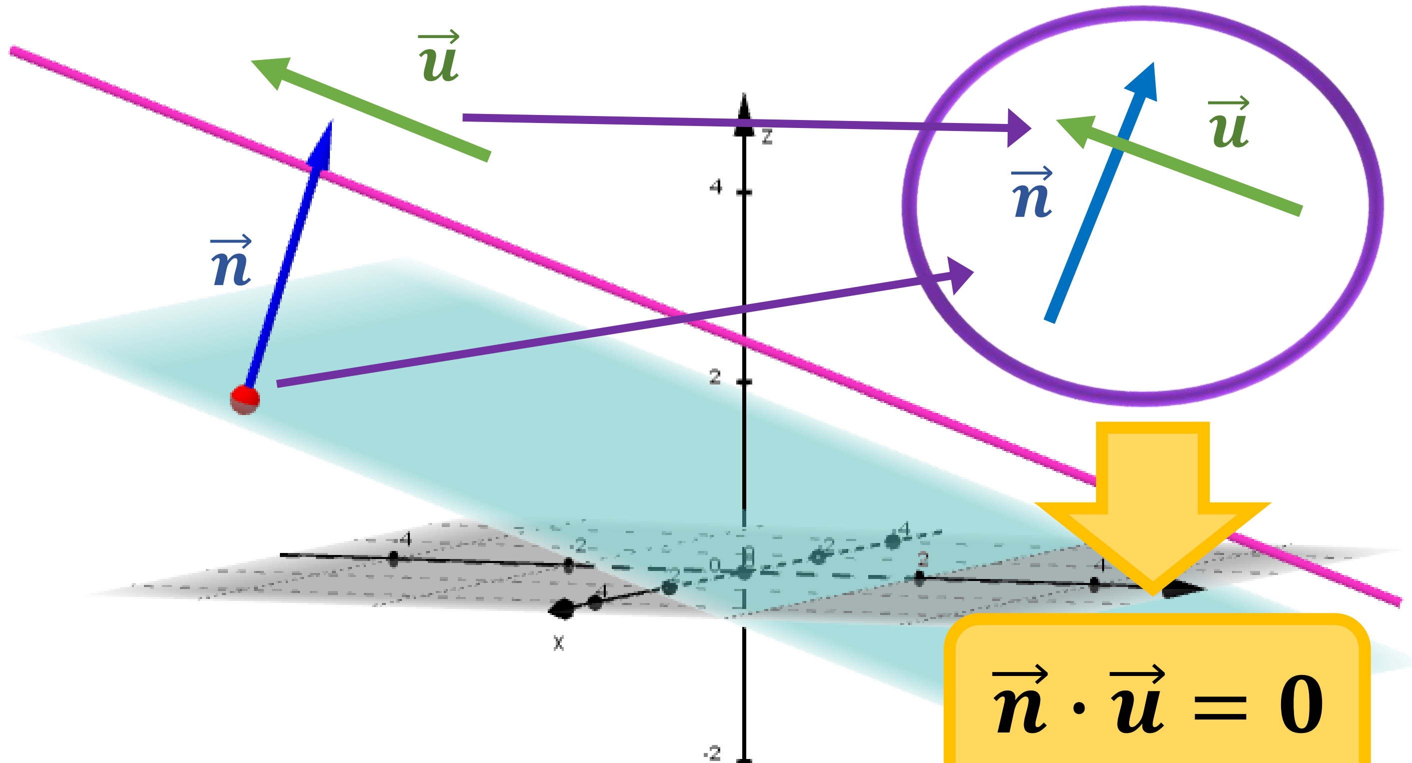
L PUEDE SER OBLICUA AL PLANO π

RECTA CONTENIDA EN UN PLANO PARALELO AL PLANO

Observemos…

Imagen de Peggy und Marco Lachmann-Anke en Pixabay

VECTOR NORMAL Y VECTOR DIRECTOR ORTOGONALES



$$\vec{n} \cdot \vec{u} = 0$$

Y ADEMÁS NO TIENEN PUNTOS EN COMÚN

Ejemplo

Sea la recta L_1 con las ecuaciones paramétricas:

$$L_1: \begin{cases} x = 5 + 2t \\ y = 3 - 8t \\ z = -1 + 6t \end{cases} \quad , t \in \mathcal{R}$$

Está contenida en un plano paralelo al plano de ecuación

$$4x - y + \frac{2}{3}z = 3$$

¡MOSTRARLO!

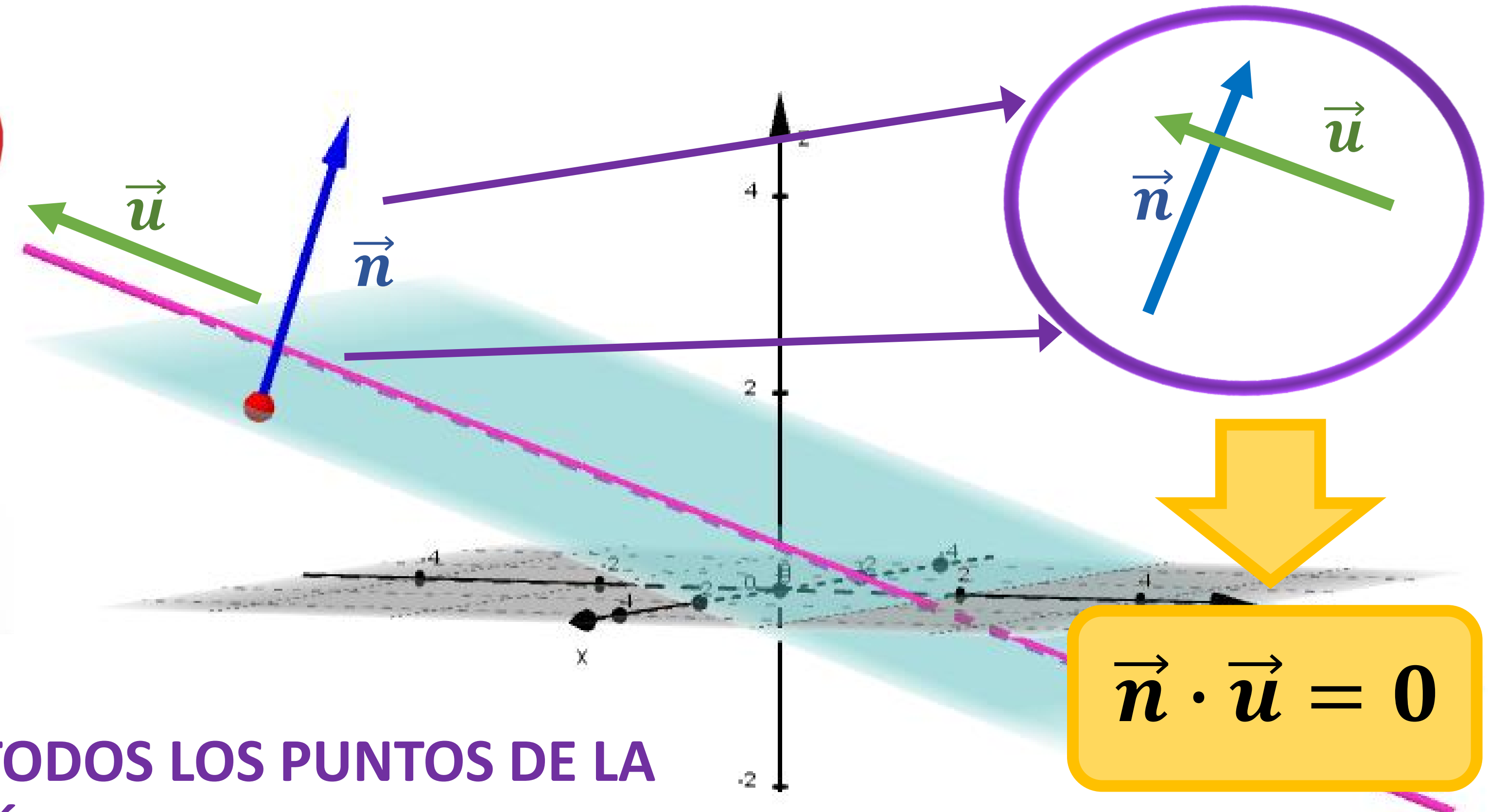
Imagen de 3dman_eu en Pixabay

RECTA CONTENIDA EN EL PLANO

Observemos...

Imagen de Peggy und Marco Lachmann-Anke en Pixabay

VECTOR NORMAL Y VECTOR DIRECTOR ORTOGONALES



$$\vec{n} \cdot \vec{u} = 0$$

Y ADEMÁS TODOS LOS PUNTOS DE LA RECTA ESTÁN EN EL PLANO... PERO ALCANZA CON VERIFICAR QUE UNO ESTÁ

Ejemplo

Imagen de 3dman_eu en Pixabay

Sea la recta L_1 de ecuación con ecuaciones paramétricas:

$$L_1: \begin{cases} x = 5 + 2t \\ y = 3 - 8t \\ z = -1 + 6t \end{cases} \quad , t \in \mathcal{R}$$

La misma es paralela al plano de ecuación:

$$4x - y + \frac{2}{3}z = \frac{49}{3}$$

Además, está contenida en el plano.

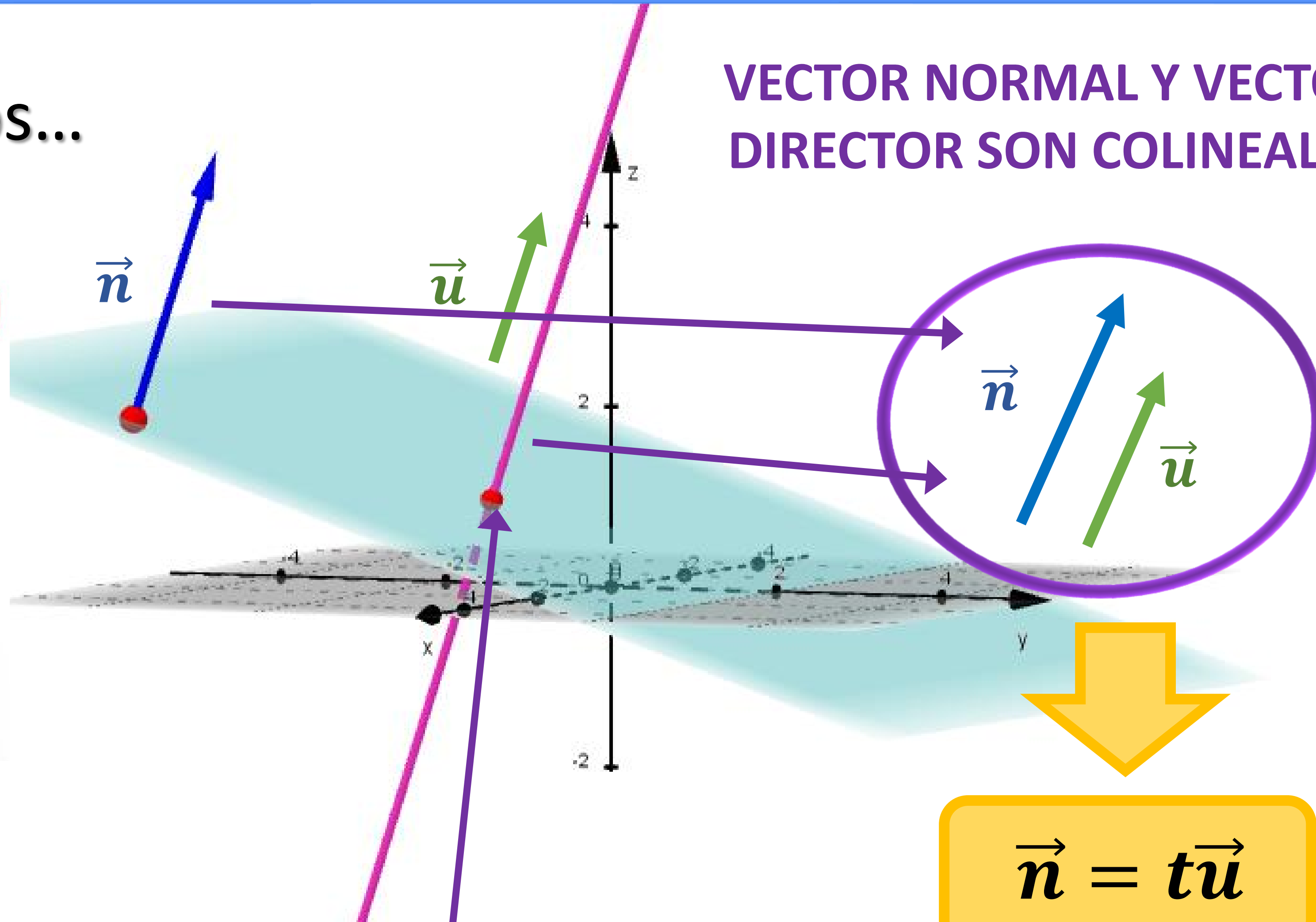
¡MOSTRARLO!

RECTA PERPENDICULAR AL PLANO

Observemos…

Imagen de Peggy und Marco Lachmann-Anke en Pixabay

VECTOR NORMAL Y VECTOR DIRECTOR SON COLINEALES



$$\vec{n} = t\vec{u}$$

SE CORTAN EN UN SOLO PUNTO

Ejemplo

Sea la recta L_1 de ecuación con ecuaciones paramétricas:

$$L_1: \begin{cases} x = 5 + 2t \\ y = 3 - 8t \\ z = -1 + 6t \end{cases} \quad , t \in \mathcal{R}$$

La misma es perpendicular al plano de ecuación

$$2x - y - 2z = 3$$

¿Cuál es el punto de intersección?

¡MOSTRARLO!

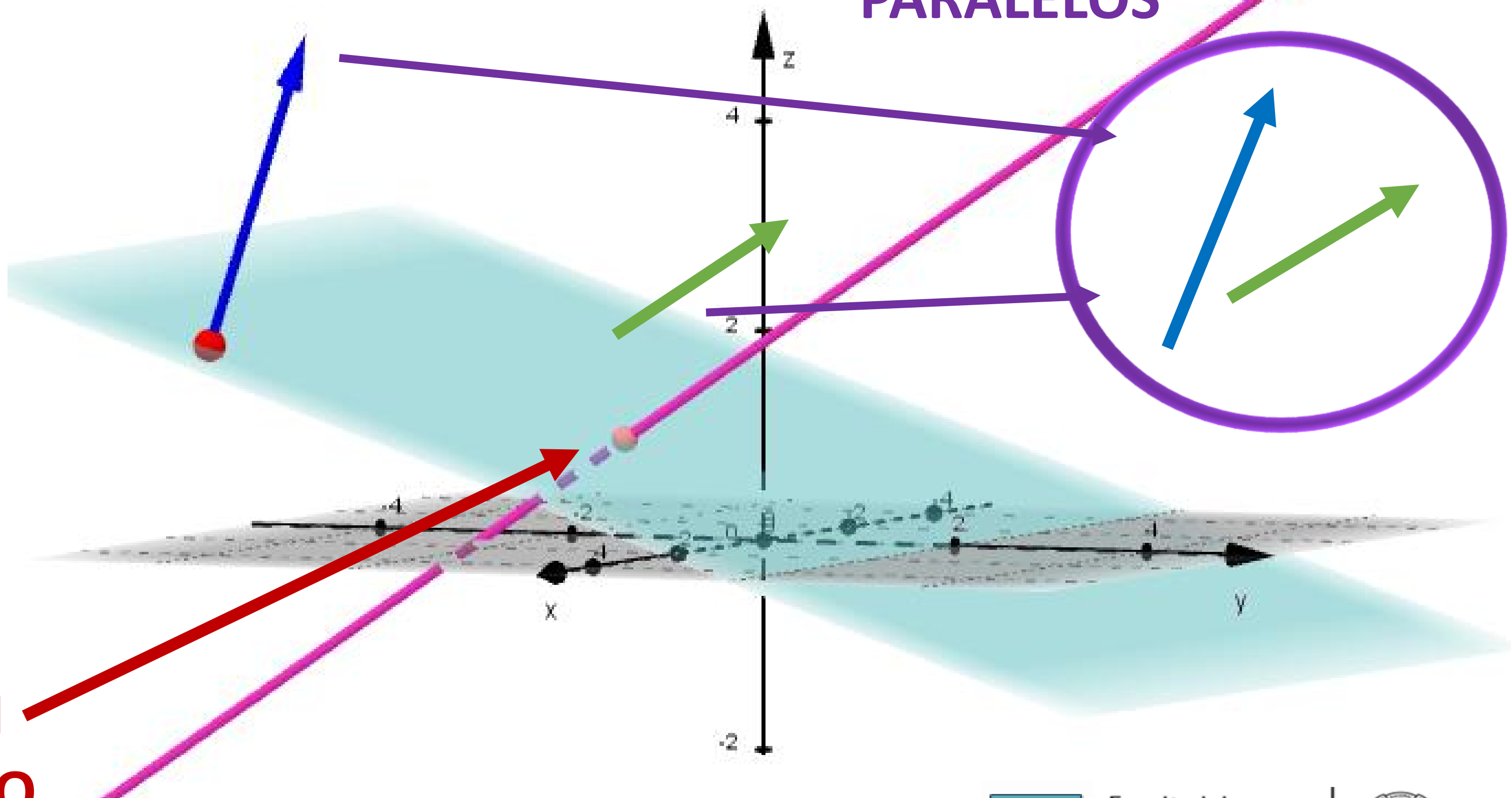
Imagen de 3dman_eu en Pixabay

RECTA PERPENDICUALR A UN PLANO

Observemos…

Imagen de Peggy und Marco Lachmann-Anke en Pixabay

VECTOR NORMAL Y VECTOR DIRECTOR NO SON PERPENDICULARES Y NO SON PARALELOS



SE CORTAN EN UN SOLO PUNTO

Ejemplo

Imagen de 3dman_eu en Pixabay

Sea la recta L_1 de ecuación con ecuaciones paramétricas:

$$L_1: \begin{cases} x = 5 + 2t \\ y = 3 - 8t \\ z = -1 + 6t \end{cases} \quad , t \in \mathcal{R}$$

corta al plano de ecuación

$$4x - y + 2z = 5$$

y no es perpendicular al plano.

¡MOSTRARLO!

¿Cuál es el punto de intersección?

Para ir terminando:

Dada la recta que pasa por el punto $A(1,-2,3)$ y tiene vector director $\vec{v} =< 4,2,-3 >$, determine un plano de manera que la recta dada sea paralela al plano, pero no esté contenida en él.

Imagen de 3dman_eu en Pixabay

Dado el plano que pasa por los puntos $A(1,-2,3)$, $\mathrm{B}(-2,4,1)$ y $\mathrm{C}(5,-3,2)$, determine las ecuaciones paramétricas de una recta que corte al plano sin que sea perpendicular a él.

GeoGebra